

New Folder Name Symmetrisation of the  
Virgo Interferometer Arms

CC1300133

**RAPPORT DE PROJET**

**PRESENTE PAR : MARC FOLLIARD**

**"SYMETRISATION DES BRAS DE L'INTERFEROMETRE VIRGO"**

**EFFECTUE AU LABORATOIRE DE L'ACCELERATEUR LINEAIRE**

**SOUS LA RESPONSABILITE DE : PATRICE HELLO  
ET DE : HASSAN AKHOUAYRI**

**ANNEE 1992-1993**

# TABLE DES MATIERES

	page
<b>I PRESENTATION DU LABORATOIRE DE L'ACCELERATEUR LINEAIRE</b>	4
<b>II BUT DU STAGE</b>	5
<b>III PRESENTATION DE VIRGO</b>	6
1) Les ondes gravitationnelles	6
2) La détection des ondes gravitationnelles	7
3) Enumération des divers bruits parasites	9
4) Description de l'interféromètre Virgo	10
<b>IV RESULTATS</b>	14
1) Etude de la variation de réflectivité des miroirs d'entrée en fonction de la température	14
a) But de l'étude	14
b) Calcul de $r_1$	16
c) Calcul de $r_2$	16
d) Calcul de la réflectivité totale du miroir d'entrée	16
e) Variations des caractéristiques des miroir avec la température	17
f) Adaptation possible des miroirs	19
2) Réalisation pratique du contrôle thermique des miroirs d'entrée	24
a) Modulation de phase frontale du faisceau du laser	24
b) Modulation d'amplitude frontale du faisceau du laser	30
c) Modulation de phase frontale et utilisation d'une lame de phase en sortie	38
d) Modulation de phase frontale avec une bande latérale unique	44
e) Modulation en température	45
3) Etude de la variation de réflectivité du miroir de recyclage en fonction de la température	48
a) But de l'étude	48
b) Méthode utilisée	48
c) Résultats	50
<b>V CONCLUSION</b>	53
<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	55
<b>ANNEXES</b>	56
I Listing du programme "couches minces"	57
II Commentaire du programme	71
III Etude du rapport signal sur bruit en sortie de l'interféromètre quand l'onde du laser est modulée en amplitude	73

## IL BUT DU STAGE

Depuis 1987, des équipes de chercheurs français et italiens travaillent en collaboration étroite sur le projet Virgo. Ce projet prévoit de construire un interféromètre de Michelson de grandes dimensions, éclairé par un laser, et destiné à la détection d'ondes gravitationnelles.

La faible amplitude des ondes gravitationnelles oblige à concevoir un montage permettant une très grande précision de mesure, et isolé autant que faire se peut des bruits parasites. Il est notamment primordial que les deux bras de l'interféromètre soient symétriques. En effet, le projet prévoit de régler l'interféromètre sur une frange sombre en sortie, car c'est là qu'on aura le maximum de sensibilité; ainsi, une perturbation du système, à condition qu'elle soit d'amplitude suffisante par rapport à la frange sombre, entraînera-t-elle un dérèglement de l'interféromètre et l'apparition de lumière en sortie. Il faut donc minimiser l'amplitude de la frange sombre, c'est à dire symétriser les deux bras au maximum. De plus, et surtout, une dissymétrie des bras de l'interféromètre le rendra plus sensible aux fluctuations de fréquence du laser source.

Or, des calculs récents ont révélé que les réflectivités des miroirs étaient assez sensibles aux variations de température, et qu'un écart de température entre les deux bras pouvait entraîner une dissymétrie importante de l'ensemble.

Le but de ce stage est d'étudier les variations de réflectivité des miroirs en fonction de la température, et de déterminer s'il est possible de les limiter, ou mieux, de les contrôler. En effet, un contrôle de la réflectivité des miroirs par le biais de la température permettrait par exemple de corriger un écart entre deux miroirs, théoriquement semblables, mais qui, construits séparément, présentent une différence de réflectivité pour une même température. On pourrait aussi envisager d'adapter le miroir de recyclage, un miroir prévu pour compenser les pertes de puissance dans l'interféromètre, si ces pertes variaient dans le temps. On pourrait ainsi optimiser les capacités de l'interféromètre.

## IV. RESULTATS

### 1) Etude de la variation de réflectivité des miroirs d'entrée en fonction de la température

#### a) But de l'étude

On s'intéresse ici aux miroirs d'entrée des cavités Fabry-Pérot de l'interféromètre Virgo. Etant partiellement transparents ( il est prévu que leur facteur de transmission en intensité  $T$  soit de l'ordre de 10 à 15 % ), ils sont moins faciles à reproduire que les miroirs de renvoi, qui sont à forte réflectivité (  $R=0,9999$  en intensité ). Il est donc probable que l'asymétrie entre les deux bras de l'interféromètre sera essentiellement due à une différence de réflectivité des deux miroirs d'entrée.

On comprend aisément l'intérêt que représenterait un dispositif interne à l'interféromètre permettant de corriger cette différence. Or l'indice des miroirs ( faits de silice ) varie avec la température, ce qui induit des variations de réflectivité. Nous allons donc étudier la possibilité de réaliser un contrôle thermique de la réflectivité des miroirs.

Pour atteindre la sensibilité prévue par le projet, il faudrait que les variations relatives de finesse, dans chaque bras et d'un bras à l'autre, soient inférieures à 0,1 % [1]:

$$\frac{\Delta F}{F} < 10^{-3}$$

En supposant que la réflectivité en intensité des miroirs de renvoi (  $R_2$  ) est constante, on peut lier les variations de  $F$  à celles de la réflectivité en intensité des miroirs d'entrée (  $R_1$  ). On rappelle que :

$$F = \frac{\pi \cdot (R_1 R_2)^{1/4}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}$$

$$\text{donc } \ln(F) = \ln(\pi) + \frac{1}{4} \ln(R_1) + \frac{1}{4} \ln(R_2) - \ln(1 - \sqrt{R_1 R_2})$$

$$\text{d'où } \frac{dF}{F} = \frac{1}{4} \frac{dR_1}{R_1} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{dR_1}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}$$

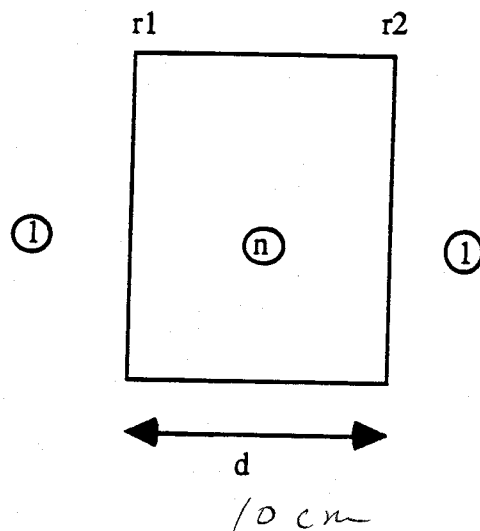
$$\text{ou encore : } \frac{dF}{F} = \frac{1}{4} \left[ \frac{\sqrt{R_1} \cdot (1 - \sqrt{R_1 R_2}) + 2R_1 \sqrt{R_2}}{R_1 \sqrt{R_1} \cdot (1 - \sqrt{R_1 R_2})} \right] dR_1 = \frac{1}{4} \left[ \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2} + 2\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 \cdot (1 - \sqrt{R_1 R_2})} \right] dR_1$$

$$\text{donc } \frac{dF}{F} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \sqrt{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}} \cdot \frac{dR_1}{R_1}$$

En prenant  $R_1=0,90$  et  $R_2=0,99995$ , on trouve :  $\frac{\Delta F}{F} = 9,5 \frac{\Delta R_1}{R_1}$

Donc si on peut obtenir  $\Delta R_1=10^{-4}$  à l'intérieur de chaque bras, et d'un bras à l'autre, on pourra remplir la condition sur la finesse.

On peut considérer chacun de ces miroirs d'entrée comme un Fabry-Pérot d'épaisseur  $d=0,1\text{m}$ , dont le milieu de propagation a l'indice de la silice ( $n=1,45$ ), et dont les miroirs ont pour réflectivité en amplitude  $r_1$  et  $r_2$ . L'indice à l'extérieur du miroir est égal à 1 (indice du vide)



On a :

$r_1 = \frac{n-1}{n+1}$ , réflectivité d'un dioptré séparant deux milieux d'indices différents  
*interface?*

$r_2$  : réflectivité d'un certain nombre de couches minces déposées sur un substrat de silice; on empile ces couches de manière à trouver  $R_{cav}=0,85$ ,  $R_{cav}$  étant la réflectivité totale en intensité du miroir d'entrée de la cavité.

### b) Calcul de $r_1$

D'après la formule ci-dessus, si on prend  $n=1,45$  à  $T=300$  K, on trouve  $r_1=0,18$ .

Le coefficient de variation de l'indice de la silice avec la température est de l'ordre de  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$  [2], donc une hausse de 10 K de la température nous donnera  $r_1=0,18$ , et  $\Delta r_1=3 \cdot 10^{-5}$ ; donc  $r_1$  varie peu avec la température .

### c) Calcul de $r_2$

Le programme informatique "couches minces" (voir annexe II) permet de calculer la réflectivité en intensité d'une superposition de couches minces sur un substrat de silice pour une température donnée .

En alternant cinq couches d'épaisseur  $\lambda/4$  ( $\lambda$  étant la longueur d'onde de la lumière éclairant le miroir ) de  $\text{Ta}_2\text{O}_5$  ( d'indice 2,19 ) et de  $\text{SiO}_2$  ( d'indice 1,47 ) [3], on trouve  $r_2^2=0,78$  pour une température de 300 K .

En prenant des coefficients de variation de l'indice en fonction de la température de  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$  pour la silice et de  $6 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  [4] pour l'autre constituant, le programme nous donne une hausse de la réflectivité ( en intensité ) de  $2,5 \cdot 10^{-4}$  pour une hausse de température de 10 K; donc ici aussi, on peut supposer que  $r_2$  reste constante pour une faible variation de température .

### d) Calcul de la réflectivité totale du miroir d'entrée

On peut écrire [5]:

$$R_{\text{cav}} = \frac{r_1^2(1-p)^2 + r_2^2 + 2r_1r_2(1-p)\cos(4\pi nd/\lambda)}{1 + r_1^2r_2^2 + 2r_1r_2\cos(4\pi nd/\lambda)}$$

$p$  désignant les pertes ( en intensité ) de la face de réflectivité  $r_2$  du miroir;

$n$  étant l'indice de la silice constituant le miroir à la température  $T$ ;

$d$  étant l'épaisseur du miroir;

$\lambda$  étant la longueur d'onde de la lumière éclairant le miroir .

D'après les deux paragraphes précédents, on peut supposer que les variations de  $R_{cav}$  en fonction de la température dépendront surtout de celles du cosinus, autrement dit de  $nd/\lambda$ .  $\lambda$  est une constante dépendant du laser, donc elle ne varie pas avec la température. Ce sont donc les variations du produit  $nd$  ( le chemin optique) qui induiront celles de  $R_{cav}$ .

Donc on trouvera, comme pour une cavité classique :

$$R_{cav} = R_{min} = \frac{(r_2 - r_1(1-p))^2}{(1 - r_1 r_2)^2}$$

quand  $\cos(4\pi nd/\lambda) = -1$  c'est à dire  $nd = (2k+1)\lambda/4$ ,  $k$  étant un entier ;

$$R_{cav} = R_{max} = \frac{(r_2 + r_1(1-p))^2}{(1 + r_1 r_2)^2}$$

quand  $\cos(4\pi nd/\lambda) = +1$  c'est à dire  $nd = (2k)\lambda/4$ ,  $k$  étant un entier .

#### Application numérique :

Si on prend  $r_1 = 0,18$  à  $T = 300$  K, on trouve :

$$r_2 = 0,78$$

$$p = 10^{-3}$$

$$R_{cav}(300K) = 0,83$$

$$R_{min} = 0,70$$

$$R_{max} = 0,84$$

Rq : en réalité, les miroirs d'entrée de Virgo auront des pertes totales plus faibles, qui seront de l'ordre de  $10^{-4}$ , mais ceci ne modifie pratiquement pas les résultats obtenus.

#### e) Variations des caractéristiques des miroirs avec la température

L'indice  $n$  suit la loi :  $n(T) = n(T_0) + (dn/dT).(T-T_0)$ ;

l'épaisseur  $d$  suit la loi :  $d(T) = d(T_0) + \alpha.d(T_0).(T-T_0)$ ;

$dn/dT$  est le coefficient de variation de l'indice en fonction de la température;  
 $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique de la silice.

D'après ce que nous avons dit précédemment, la réflectivité du miroir d'entrée varie périodiquement en fonction de  $nd$ , la demi-période étant  $\Delta(nd) = \lambda/4$ . On peut relier les variations du produit  $nd$  à celles de la température  $T$  :



$$\Delta(nd) = n(T).d(T) - n(T_0).d(T_0)$$

$$\begin{aligned} \Delta(nd) &= [n(T_0) + (dn/dT).(T-T_0)].[d(T_0) + \alpha.d(T_0).(T-T_0)] - n(T_0).d(T_0) \\ &= [d(T_0).(dn/dT) + n(T_0).\alpha.d(T_0)].\Delta T + (dn/dT).\alpha.d(T_0).(\Delta T)^2 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$dn/dT = 1,1.10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

$$\alpha = 5,1.10^{-7} \text{ K}^{-1}$$

et à température ambiante ( $T_0$ ) :  $n = 1,47$

$$d = 0,1 \text{ m}$$

$$\text{d'où } \Delta(nd) = (1,174.10^{-6}).\Delta T + (5,61.10^{-13}).(\Delta T)^2$$

On peut remarquer que le terme devant  $(\Delta T)^2$  est négligeable devant l'autre, donc que  $nd$  varie quasiment linéairement avec  $T$ . On peut donc approximer  $R_{cav}$  par une fonction périodique de la température, de demi-période  $\Delta T$ .

Application numérique :

$$\lambda = 1064 \text{ nm}$$

$$\text{d'où } \Delta(nd) = 2,65.10^{-7} \text{ m}$$

$$\text{et } \Delta T = 0,226 \text{ K}$$

Rq : Si on reprend ces calculs en supposant  $d$  constante, on trouve  $\Delta T = 0,241 \text{ K}$ ; la dilatation du miroir due à la hausse de température a donc des effets moins importants sur l'évolution de la réflectivité que la variation de l'indice de la silice.

Rq : Tous ces résultats sont confirmés par le programme "couches minces", qui prend en compte les variations de  $r_1$ ,  $r_2$ , et  $d$  avec la température, ce qui montre que nos approximations sont justifiées.

Conclusion : Des variations très faibles de la température vont entraîner des variations importantes de la réflectivité des miroirs d'entrée des cavités de Virgo : en effet, il suffira d'une hausse en température de  $0,226 \text{ K}$  pour entraîner une variation  $\Delta R_{cav} = R_{max} - R_{min}$  de  $14 \%$  en réflectivité. Cet effet vient principalement du fait que l'indice de la silice varie avec la température; les autres effets, tels que la dilatation ou la variation de réflectivité des faces sont négligeables. Cet effet, nuisible a

"corner" ? wedge?

priori, peut être supprimé en mettant un "coin" sur la face avant du miroir, ou limité en y plaçant un revêtement anti-reflet. Cependant, on pourrait aussi envisager de s'en servir, et de tenter de contrôler la température de chaque miroir pour symétriser les bras de l'interféromètre.

f) Adaptation possible des miroirs

Pour diminuer les variations de la réflectivité en fonction de la température, on peut envisager de déposer un anti-reflet sur la face avant du miroir, en vue de diminuer  $r_1$ . Ainsi, la sensibilité de la réflectivité totale du miroir en fonction de la température sera toujours aussi importante, mais l'amplitude de ses variations sera, elle, nettement réduite.

Par exemple, si on prend  $r_1=0,1$ ,  $p=10^{-4}$ , et  $r_2^2=0,895$  ( on alterne sept couches d'oxyde de tantale et de silice ) à 300 K, on trouvera :

$$R_{\min} = 0,873$$

$$R_{\max} = 0,913$$

$$R_{\text{cav}}(300\text{K}) = 0,911$$

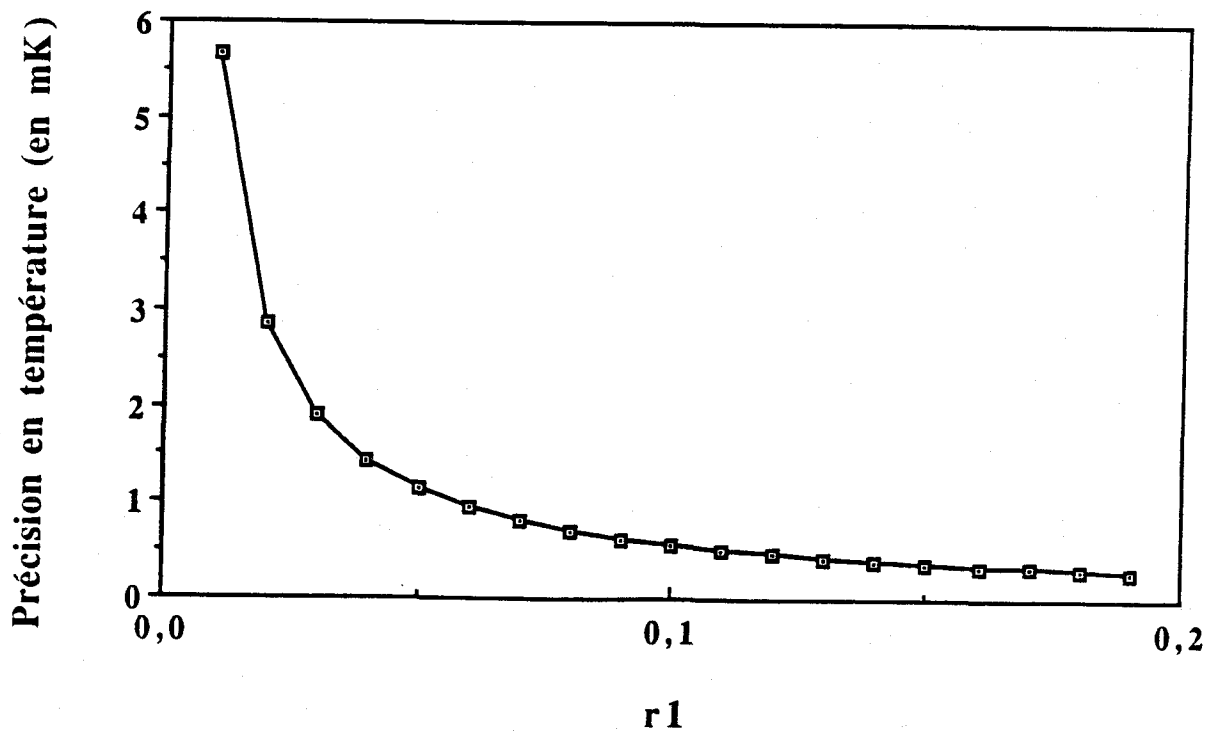
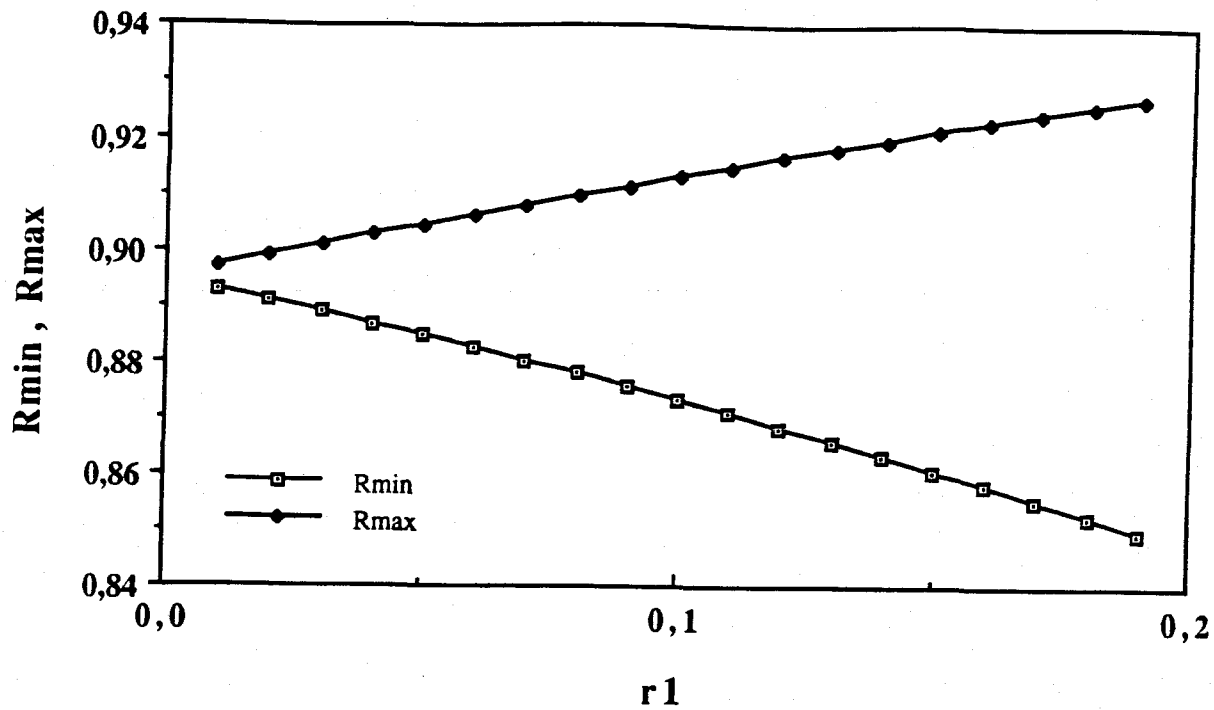
$$\frac{R_{\max} - R_{\min}}{\Delta T}$$

d'où  $\Delta R_{\text{cav}}/\Delta T = 0,18 \text{ K}^{-1}$  sur une demi-période (on obtenait 0,62 sans anti-reflet).

Si on diminue encore  $r_1$ , par exemple  $r_1^2=0,1 \%$ , on obtiendra pour la réflectivité totale du miroir des variations entre 0,888 et 0,901, ce qui nous donnera en moyenne un  $\Delta R_{\text{cav}}/\Delta T$  égal à  $0,05 \text{ K}^{-1}$  sur une demi-période.

On voit donc l'intérêt de l'emploi d'un anti-reflet pour minimiser les fluctuations de la réflectivité des miroirs. On peut de plus envisager de thermostatier les miroirs avec une précision de 0,1 K, ce qui devrait nous permettre d'avoir des écarts de réflectivité entre les deux miroirs d'entrée de l'ordre de 0,5 %, sinon mieux (dans le cas du deuxième revêtement anti-reflet). Si on descend la précision sur T à 0,002 K, on pourra même obtenir une réflectivité fixée à 0,01 % près en moyenne, ce qui est l'objectif recherché.

On a tracé sur la page suivante les courbes  $R_{\min}=f(r_1)$ ,  $R_{\max}=f(r_1)$ , et  $\Delta T_0=f(r_1)$ , pour des valeurs de  $r_1$  allant de 0,01 à 0,20.  $\Delta T_0$  est la précision en température permettant d'assurer une stabilité de 0,01 % pour la réflectivité en intensité. Ces courbes ont été tracées dans le cas où  $r_2^2=0,895$  et  $p=10^{-4}$ .



Variations de Rmin, Rmax, et  $\Delta T_0$  en fonction de r1

Il faut maintenant vérifier que l'emploi de couches anti-reflet ne limite pas les réflectivités de telle manière qu'il ne soit plus possible de corriger un miroir par rapport à l'autre. Nous allons donc calculer les plages de variation de  $R_{cav}$ , dans les cas où  $r_2^2=0,89$ , puis  $r_2^2=0,90$ , pour les deux anti-reflets considérés précédemment; nous pourrons ainsi déterminer s'il est possible de corriger un écart absolu de réflectivité en intensité de 1 % quand on utilise un anti-reflet.

On pourra corriger l'écart entre  $M_1$  et  $M_2$  si, la réflectivité de  $M_1$  variant entre  $R^1_{min}$  et  $R^1_{max}$ , et celle de  $M_2$  entre  $R^2_{min}$  et  $R^2_{max}$ , on vérifie l'une des deux conditions suivantes :

$$R^1_{max} \geq R^2_{min}$$

$$R^1_{min} \leq R^2_{max}$$

### Résultats :

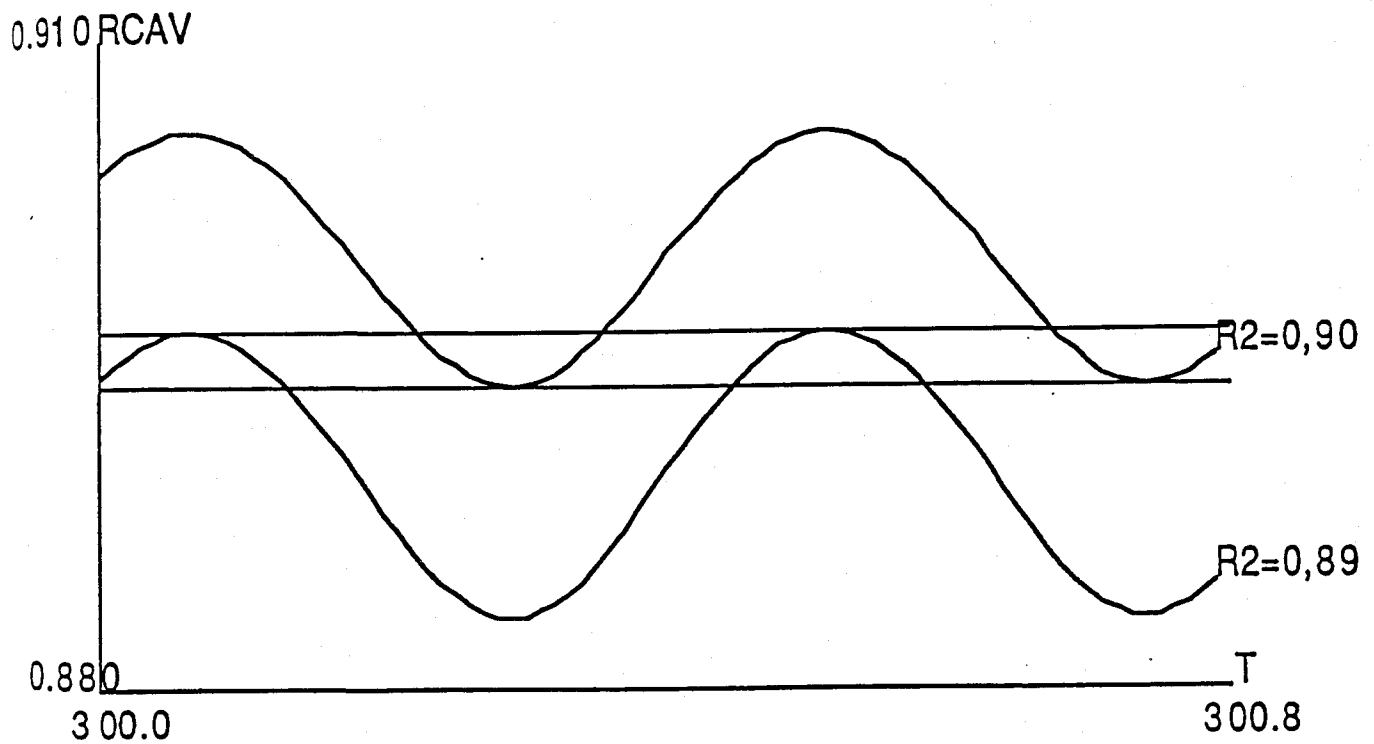
Pour des pertes  $p=10^{-4}$ , on obtient les résultats suivants :

$r_1^2$	$r_2^2$	0,89	0,90
0,01		$R_{min}=0,867$ $R_{max}=0,909$	$R_{min}=0,879$ $R_{max}=0,917$
0,001		$R_{min}=0,883$ $R_{max}=0,896$	$R_{min}=0,894$ $R_{max}=0,906$
0,005		$R_{min}=0,874$ $R_{max}=0,904$	$R_{min}=0,886$ $R_{max}=0,913$

Dans le deuxième cas ( $r_1^2=0,001$ ), on constate que les plages de variation de réflectivité se chevauchent à peine ( voir le graphe page suivante ); et il est possible qu'en tenant compte de phénomènes mineurs, comme les variations de  $r_1$ ,  $r_2$  et  $d$  avec la température, elles soient complètement disjointes; ainsi, même avec un très bon contrôle en température, on ne pourrait pas réduire l'écart en-deçà d'un certain seuil.

Mais dans le premier cas, bien que les plages se chevauchent suffisamment (entre 70 et 80 % de recouvrement), la sensibilité aux variations de température est plus faible : pour obtenir une précision moyenne de 0,01 % sur la réflectivité, il ne faut plus une stabilité en température à 0,002 K près, mais à  $5,5 \cdot 10^{-4}$  K près.

DANS LE CAS OU ON PREND  $R_1=0,001$  ,  
ON A REPRESENTÉ LA REFLECTIVITE GLOBALE  
DU MIROIR D'ENTREE D'UNE CAVITE DE VIRGO  
QUAND  $R_2=0,89$  PUIS  $R_2=0,90$



Dans le troisième cas, avec une valeur intermédiaire pour l'anti-reflet, on obtient un assez bon recouvrement ( de l'ordre de 60 % ), avec un  $\Delta R_{\text{cav}}/\Delta T$  égal à  $0,13 \text{ K}^{-1}$  sur une demi-période, ce qui nous permettrait de régler les réflectivités à 0,01 % près si on contrôlait les variations de température à  $7 \cdot 10^{-4} \text{ K}$  près .

**Conclusion** : Si l'on contrôle très bien la température ( avec une stabilité  $< 0,002 \text{ K}$  ), on pourra utiliser des anti-reflets de réflectivité relativement faible (  $r_1^2$  de l'ordre de  $5 \cdot 10^{-3}$  ), et fixer les réflectivités des miroirs à 0,01 % près .

Sinon, on aura intérêt à utiliser des anti-reflets de réflectivité très faible (  $r_1^2 \approx 10^{-3}$  ), qui demanderont un contrôle de la température un peu moins rigide, et permettront selon les cas d'avoir une différence entre les réflectivités des bras inférieure à 0,01%, ou de l'ordre de quelques dixièmes de pour cent ( dans tous les cas, on obtiendra quand même une stabilité à 0,01 % à l'intérieur de chaque bras ).

On pourra se servir des trois courbes précédentes pour choisir les caractéristiques des miroirs en fonction de la précision du thermostat que l'on peut atteindre et de l'adaptabilité des miroirs que l'on souhaite obtenir. Il s'agira donc de faire un "compromis" entre la plage de recouvrement entre les miroirs dont on veut disposer, et la précision du thermostat que l'on peut atteindre.

## 2) Réalisation pratique du contrôle thermique des miroirs d'entrée

Pour pouvoir corriger correctement les finesses, il faut disposer d'un signal d'erreur qui soit une fonction impaire de leur différence. Nous allons expliquer ici comment obtenir un tel signal à partir du signal démodulé utilisé pour la détection des ondes gravitationnelles. La modulation prévue dans le projet Virgo sera probablement une modulation frontale (ou peut-être une modulation externe). La modulation interne est exclue, car le rajout des électro-optiques nécessaires à une telle opération dans les bras causerait de grosses pertes par absorption. On envisage pour commencer une modulation de phase, car c'est la plus simple à mettre en oeuvre pratiquement.

### a) Modulation de phase frontale du faisceau du laser

On suppose que le laser est une source monofréquence monochromatique, émettant l'onde :  $A_{\text{las}}(t) = A_0 \cdot e^{i\omega t}$ .

On fait subir au faisceau qu'il émet une modulation de phase frontale, à la pulsation  $\omega_m$ . On obtiendra donc une onde modulée de la forme :

$$A_{\text{in}}(t) = A_0 e^{i\omega t} e^{i m \cos(\omega_m t + \phi)}$$

On peut décomposer le terme de modulation sous forme d'une somme de fonctions de Bessel :

$$e^{i m \cos(\omega_m t + \phi)} = J_0(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(m) \cos[2k(\omega_m t + \phi)] \\ + 2i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(m) \cos[(2k+1)(\omega_m t + \phi)]$$

$J_n$  étant la fonction de Bessel d'ordre  $n$ .

Si l'on suppose que la profondeur de la modulation,  $m$ , est très faible, on peut se contenter du développement au premier ordre :

$$e^{i m \cos(\omega_m t + \phi)} = J_0(m) + 2i J_1(m) \cos[\omega_m t + \phi] \\ = J_0(m) + i J_1(m) e^{i(\omega_m t + \phi)} + i J_1(m) e^{-i(\omega_m t + \phi)}$$

On peut alors écrire l'onde modulée sous la forme d'une porteuse accompagnée de deux bandes latérales :

$$A_{in}(t) = A_0 J_0(m) e^{i\omega t} + i A_0 J_1(m) e^{i\phi} e^{i(\omega+\omega_m)t} + i A_0 J_1(m) e^{-i\phi} e^{i(\omega-\omega_m)t}$$

$$A_{in}(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + B_1 \cdot e^{i(\omega+\omega_m)t} + C_1 \cdot e^{i(\omega-\omega_m)t}$$

Pour chacune des trois fréquences, on va trouver un coefficient de transmission de l'interféromètre, que nous appellerons  $t(0)$  pour la porteuse,  $t(\omega_m)$  et  $t(-\omega_m)$  pour les bandes latérales supérieure et inférieure. Et le détecteur placé en sortie de l'interféromètre recevra l'onde  $A_{out}(t)$  :

$$A_{out}(t) = A_1 \cdot t(0) \cdot e^{i\omega t} + B_1 \cdot t(\omega_m) \cdot e^{i(\omega+\omega_m)t} + C_1 \cdot t(-\omega_m) \cdot e^{i(\omega-\omega_m)t}$$

Pour toute pulsation  $\omega_i$ , l'expression de  $t(\omega_i)$  est [6] :

$$t(\omega_i) = \frac{-r_s t_s t_r e^{i\frac{\omega+\omega_i}{c}} \left[ e^{i\frac{2ia-\omega+\omega_i}{c}} F_1(\omega_i) + e^{i\frac{2ib-\omega+\omega_i}{c}} F_2(\omega_i) \right]}{1+r_r e^{i\frac{2il-\omega+\omega_i}{c}} \left[ t_s^2 e^{i\frac{2ia-\omega+\omega_i}{c}} F_1(\omega_i) - r_s^2 e^{i\frac{2ib-\omega+\omega_i}{c}} F_2(\omega_i) \right]}$$

avec les notations du dessin suivant :

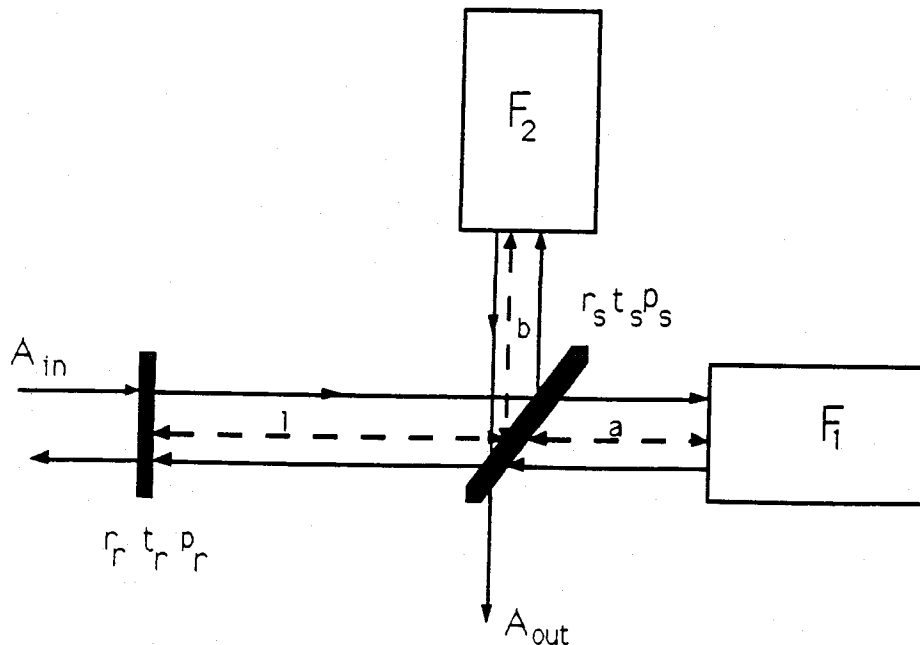


Schéma de l'interféromètre



$c$  étant la célérité de la lumière dans le vide,  $F_1$  et  $F_2$  les réflectances des deux cavités.

On a :

$$F_1(\omega_i) = \frac{r_1 + (1 - p_1) \cdot r_2 e^{2i \frac{\omega + \omega_i}{c} L}}{1 + r_1 r_2 e^{2i \frac{\omega + \omega_i}{c} L}}$$

$L$  est la longueur des cavités Fabry-Pérot (nous en avons schématisé une ci-dessous),  $r_2$  est la réflectivité en amplitude des miroirs de renvoi,  $r_1$  et  $p_1$  la réflectivité en amplitude et les pertes en intensité du miroir d'entrée de la première cavité; pour la deuxième cavité, on prendra les mêmes caractéristiques à l'exception de la réflectivité en amplitude du miroir d'entrée, que nous noterons  $r'_1$ , d'où l'expression de  $F_2(\omega_i)$ .

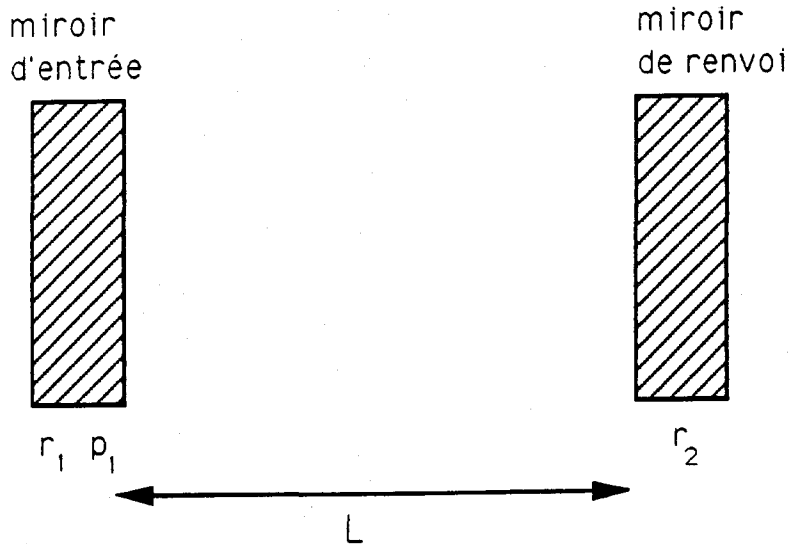


Schéma d'une cavité Fabry-Pérot

La puissance du signal atteignant le détecteur est :

$$P(t) = \|A_{out}\|^2 = A_1 A_1^* t(0) t^*(0) + A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) e^{-i\omega_m t} + A_1 C_1^* t(0) t^*(-\omega_m) e^{i\omega_m t} \\ + B_1 A_1^* t(\omega_m) t^*(0) e^{i\omega_m t} + B_1 B_1^* t(\omega_m) t^*(\omega_m) + B_1 C_1^* t(\omega_m) t^*(-\omega_m) e^{2i\omega_m t} \\ + C_1 A_1^* t(-\omega_m) t^*(0) e^{-i\omega_m t} + C_1 B_1^* t(-\omega_m) t^*(\omega_m) e^{-2i\omega_m t} + C_1 C_1^* t(-\omega_m) t^*(-\omega_m)$$

Cette puissance est recueillie par un photodétecteur, qui délivre un courant proportionnel :

$$I(t) = \frac{\eta e}{h\nu} P(t)$$

$\eta$  est le rendement quantique du détecteur,  $e$  la charge élémentaire,  $h$  la constante de Planck, et  $\nu$  la fréquence du laser.

Ce courant est combiné à un courant de démodulation qu'on suppose faiblement modulé, de la forme :

$$D(t) = d_0 e^{i\omega_m t} + d_0^* e^{-i\omega_m t}$$

On obtient alors un courant  $J(t) = D(t).I(t)$  :

$$J(t) \left( \frac{\eta e}{h\nu} \right)^{-1} = d_0 \cdot e^{i\omega_m t} \cdot P(t) + d_0^* \cdot e^{-i\omega_m t} \cdot P(t)$$

Ce courant est ensuite envoyé dans un filtre passe-bas, qui ne laisse passer que les termes continus (et éventuellement ceux dûs au passage d'une onde gravitationnelle, s'il y en avait, et qui seraient de fréquence faible). On obtient ainsi le signal  $S(t)$  tel que :

$$S(t) \cdot \left( \frac{\eta e}{h\nu} \right)^{-1} = d_0 A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) + d_0^* A_1 C_1^* t(0) t^*(-\omega_m) \\ + d_0^* B_1 A_1^* t(\omega_m) t^*(0) + d_0 C_1 A_1^* t(-\omega_m) t^*(0)$$

$$\text{Ou encore : } S(t) \cdot \left( \frac{\eta e}{h\nu} \right)^{-1} = 2 \operatorname{Re} [d_0 A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) + d_0^* A_1 C_1^* t(0) t^*(-\omega_m)]$$

Pour poursuivre le calcul, nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices, ou ayant trait au mode de fonctionnement prévu de l'interféromètre :

\*  $r_s = t_s$  (cas idéal pour la séparatrice) ;

\* On suppose que  $2\omega L/c = \pi [2\pi]$  ; cela signifie que la porteuse est résonante dans les cavités, de longueur  $L$ , donc qu'on a une puissance stockée à l'intérieur maximale;

\* Soit  $d=b-a$  ; on suppose que  $2\omega d/c = \pi [2\pi]$  ; cela revient à dire que toute la lumière du laser de pulsation  $\omega$  est réfléchiée par l'interféromètre, et que sa sortie est accordée sur une frange sombre pour la pulsation  $\omega$ ;

\* On suppose que  $2\omega(1+a)/c = 0 [2\pi]$  ; cela signifie que la porteuse est aussi résonante dans la cavité de recyclage formée par l'interféromètre et le miroir de recyclage, donc qu'on a là aussi une puissance maximale;

Avec ces hypothèses, les trois coefficients de transmission s'écrivent :

$$t(0) = \frac{-r_s^2 t_r e^{-i\frac{\omega}{c}} [F_1(0) - F_2(0)]}{1 + r_r r_s^2 [F_1(0) + F_2(0)]}$$

$$t(\omega_m) = \frac{-r_s^2 t_r e^{-i\frac{\omega}{c}} e^{i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \left[ F_1(\omega_m) - e^{2id\frac{\omega_m}{c}} F_2(\omega_m) \right]}{1 + r_r r_s^2 e^{2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}} \left[ F_1(\omega_m) + e^{2id\frac{\omega_m}{c}} F_2(\omega_m) \right]}$$

$$t(-\omega_m) = \frac{-r_s^2 t_r e^{-i\frac{\omega}{c}} e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \left[ F_1(-\omega_m) - e^{-2id\frac{\omega_m}{c}} F_2(-\omega_m) \right]}{1 + r_r r_s^2 e^{-2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}} \left[ F_1(-\omega_m) + e^{-2id\frac{\omega_m}{c}} F_2(-\omega_m) \right]}$$

$$\text{Avec : } F_1(0) = \frac{r_1 - (1-p_1)r_2}{1 - r_1 r_2}$$

$$F_1(\omega_m) = \frac{r_1 - (1-p_1)r_2 e^{2i\frac{\omega_m}{c}L}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\frac{\omega_m}{c}L}}$$

On remarque que :  $F_1(-\omega_m) = F_1^*(\omega_m)$

Les expressions de  $F_2(0)$ ,  $F_2(\omega_m)$ , et  $F_2(-\omega_m)$  se déduisent de celles de  $F_1(0)$ ,  $F_1(\omega_m)$ , et  $F_1(-\omega_m)$  en remplaçant  $r_1$  par  $r'_1$ .

Nous allons de plus supposer que la modulation subie par le faisceau est une modulation de phase pure, c'est à dire que  $A_1$  est réel et  $C_1 = -B_1^*$ . On peut alors écrire:

$$S(t) \left( \frac{\eta e}{h\nu} \right)^{-1} = 2 A_1 \operatorname{Re} [d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) - d_0^* B_1 t(0) t^*(-\omega_m)]$$

Au vu des expressions des coefficients de transmission, on peut aisément remarquer que :

$$t(-\omega_m) = t^*(\omega_m) e^{-2i\pi \frac{\omega}{c}}$$

D'où :

$$d_0^* B_1 t(0) t^*(-\omega_m) = d_0^* B_1 t(0) t(\omega_m) e^{2i\pi \frac{\omega}{c}} = d_0^* B_1 t^*(0) t(\omega_m) = (d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m))^*$$

On peut donc écrire :

$$S(t) \left( \frac{\eta e}{h\nu} \right)^{-1} = 2 A_1 \operatorname{Re} [d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) - (d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m))^*] = 0$$

On ne peut donc pas se servir de la modulation de phase frontale pure pour obtenir un signal d'erreur pour le contrôle thermique de la symétrie des bras de l'interféromètre, les contributions des deux bandes latérales se compensant.

Nous allons maintenant étudier le cas d'une modulation frontale d'amplitude, qui présente l'avantage par rapport à la modulation de phase de rajouter un décalage de phase entre les deux bandes latérales. ←

Nous étudierons ensuite deux adaptations de la modulation de phase pure, qui permettent aussi de décaler en phase les bandes latérales, et pourraient aussi permettre d'obtenir un signal d'erreur: la première consiste à rajouter une lame de phase à la sortie de l'interféromètre, avant démodulation, et la deuxième est la modulation à

bande latérale unique, qui supprime une des bandes latérales avant l'entrée de l'interféromètre.

b) Modulation d'amplitude frontale du faisceau du laser

Dans le cas d'une modulation d'amplitude du faisceau du laser, l'onde modulée peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 A_{in}(t) &= A_0 [1 + m \cos(\omega_m t + \phi)] e^{i\omega t} \\
 &= A_0 e^{i\omega t} + A_0 \frac{m}{2} e^{i(\omega+\omega_m)t + \phi} + A_0 \frac{m}{2} e^{i(\omega-\omega_m)t - \phi} \\
 &= A_0 e^{i\omega t} + A_0 \frac{m}{2} e^{i\phi} e^{i(\omega+\omega_m)t} + A_0 \frac{m}{2} e^{-i\phi} e^{i(\omega-\omega_m)t} \\
 &= A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{i(\omega+\omega_m)t} + C_1 e^{i(\omega-\omega_m)t}
 \end{aligned}$$

Si l'on suppose que cette modulation est pure, alors  $A_1$  est réel et  $C_1 = B_1^*$ . Dans ce cas, le signal  $S(t)$  obtenu après démodulation et filtrage du courant délivré par la photodiode placée en sortie de l'interféromètre pourra s'écrire :

$$\begin{aligned}
 S(t) \cdot \left(\frac{\eta e}{h\nu}\right)^{-1} &= 2 \operatorname{Re} [d_0 A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) + d_0^* A_1 C_1^* t(0) t^*(-\omega_m)] \\
 &= 2 A_1 \operatorname{Re} [d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) + d_0^* B_1 t(0) t^*(-\omega_m)]
 \end{aligned}$$

On conserve les hypothèses faites dans le cas de la modulation de phase (séparatrice parfaite et porteuse résonante dans l'interféromètre), et l'on a donc toujours la relation :

$$d_0^* B_1 t(0) t^*(-\omega_m) = (d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m))^*$$

Ce qui, en effectuant la substitution dans l'équation précédente, nous amène à écrire :

$$S(t) \cdot \left(\frac{\eta e}{h\nu}\right)^{-1} = 4 A_1 \operatorname{Re} [d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m)]$$

Nous allons maintenant exprimer explicitement  $S(t)$  en fonction des caractéristiques de l'interféromètre.

On a :

$$t(0) t^*(\omega_m) = \frac{r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} [F_1(0) - F_2(0)] [F_1^*(\omega_m) - e^{-2id\frac{\omega_m}{c}} F_2^*(\omega_m)]}{[1 + r_s r_s'^2 [F_1(0) + F_2(0)]] \cdot [1 + r_s r_s'^2 e^{-2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}} [F_1^*(\omega_m) + e^{-2id\frac{\omega_m}{c}} F_2^*(\omega_m)]]}$$

On peut écrire  $t(0) t^*(\omega_m)$  sous la forme :  $t(0) t^*(\omega_m) = r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{A \cdot B}{C \cdot D}$

Avec :

$$\begin{aligned} A &= F_1(0) - F_2(0) \\ &= \frac{r_1 - (1-p_1) \cdot r_2}{1 - r_1 r_2} - \frac{r'_1 - (1-p_1) \cdot r_2}{1 - r'_1 r_2} \\ &= \frac{(r_1 - r'_1) [1 - (1-p_1) \cdot r_2^2]}{1 - (r_1 + r'_1) \cdot r_2 + r_1 r'_1 r_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= F_1^*(\omega_m) - e^{-2id\frac{\omega_m}{c}} F_2^*(\omega_m) \\ &= \frac{r_1 - (1-p_1)r_2 e^{-2i\frac{\omega_m}{c}L}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\frac{\omega_m}{c}L}} - e^{-2id\frac{\omega_m}{c}} \frac{r'_1 - (1-p_1)r_2 e^{-2i\frac{\omega_m}{c}L}}{1 - r'_1 r_2 e^{-2i\frac{\omega_m}{c}L}} \\ &= \frac{(r_1 - \alpha r'_1) + (r'_1 - \alpha r_1) (1-p_1)r_2^2 \beta^2 - (1-\alpha)(r_1 r'_1 + 1-p_1)r_2 \beta}{1 - (r_1 + r'_1)r_2 \beta + r_1 r'_1 r_2^2 \beta^2} \end{aligned}$$

Avec  $\alpha = e^{-2id\frac{\omega_m}{c}}$  et  $\beta = e^{-2i\frac{\omega_m}{c}L}$

$$\begin{aligned}
C &= 1 + r_1 r_s^2 [ F_1(0) + F_2(0) ] \\
&= 1 + r_1 r_s^2 \left[ \frac{r_1 - (1-p_1)r_2}{1 - r_1 r_2} + \frac{r'_1 - (1-p_1)r_2}{1 - r'_1 r_2} \right] \\
&= 1 + r_1 r_s^2 \left[ \frac{(r_1 + r'_1) (1 + (1-p)r_2^2) - 2r_2 (r_1 r'_1 + 1 - p)}{1 - (r_1 + r'_1)r_2 + r_1 r'_1 r_2^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= 1 + r_1 r_s^2 e^{-2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}} [ F_1^*(\omega_m) + \alpha F_2^*(\omega_m) ] \\
&= 1 + r_1 r_s^2 e^{-2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}} \left[ \frac{r_1 - (1-p_1)r_2 \beta}{1 - r_1 r_2 \beta} + \alpha \frac{r'_1 - (1-p_1)r_2 \beta}{1 - r'_1 r_2 \beta} \right] \\
&= 1 + r_1 r_s^2 e^{-2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}} \left[ \frac{(r_1 + \alpha r'_1) + (1-p_1)r_2^2 \beta^2 (r'_1 + \alpha r_1) - (1+\alpha)((1-p_1)+r_1 r'_1)r_2 \beta}{1 - (r_1 + r'_1)r_2 \beta + r_1 r'_1 r_2^2 \beta^2} \right]
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
t(0) t^*(\omega_m) &= r_s^4 t_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{(r_1 - r'_1) [1 - (1-p_1)r_2^2]}{1 - (r_1 + r'_1)r_2 + r_1 r'_1 r_2^2 + r_1 r_s^2 [ (r_1 + r'_1) (1 + (1-p_1)r_2^2) - 2(r_1 r'_1 + 1 - p_1)r_2 ]} \\
&\times \frac{(r_1 - \alpha r'_1) + (r'_1 - \alpha r_1) (1-p_1)r_2^2 \beta^2 - (1-\alpha)(r_1 r'_1 + 1 - p_1)r_2 \beta}{1 - (r_1 + r'_1)r_2 \beta + r_1 r'_1 r_2^2 \beta^2 + r_1 r_s^2 \gamma [ (r_1 + \alpha r'_1) + (1-p_1)r_2^2 \beta^2 (r'_1 + \alpha r_1) - (1+\alpha)((1-p_1)+r_1 r'_1)r_2 \beta ]}
\end{aligned}$$

$$\text{Avec } \gamma = e^{-2i(1+a)\frac{\omega_m}{c}}$$

En supposant que l'écart entre les les réflectivités des deux miroirs d'entrée  $\Delta r_1 = r_1 - r'_1$  est négligeable devant  $r_1 \approx r'_1$ , on peut alors simplifier l'expression ci-dessus :

$$t(0) t^*(\omega_m) = r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{\Delta r_1 [1 - (1-p_1) r_2^2]}{1 - 2 r_1 r_2 + r_1^2 r_2^2 + r_s^2 r_r^2 [2 r_1 (1+(1-p_1)r_2^2) - 2(r_1^2+1-p_1)r_2]} \\ \times \frac{(r_1 - \alpha r'_1) + (r'_1 - \alpha r_1) (1-p_1) r_2^2 \beta^2 - (1-\alpha) (r_1 r'_1 + 1-p_1) r_2 \beta}{1 - 2 r_1 r_2 \beta + r_1^2 r_2^2 \beta^2 + r_s^2 r_r^2 \gamma [(r_1 + \alpha r'_1) + (1-p_1) r_2^2 \beta^2 (r'_1 + \alpha r_1) - (1+\alpha)((1-p_1) + r_1 r'_1) r_2 \beta]}$$

Ou encore :

$$t(0) t^*(\omega_m) = r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{\Delta r_1 [1 - (1-p_1) r_2^2]}{(1 - r_1 r_2)^2 + 2 r_s^2 r_r^2 [r_1 (1+(1-p_1)r_2^2) - (r_1^2+1-p_1)r_2]} \\ \times \frac{r_1(1-\alpha) + \alpha \Delta r_1 + [r_1(1-\alpha) - \Delta r_1] (1-p_1) r_2^2 \beta^2 - (1-\alpha) (r_1^2 + 1-p_1) r_2 \beta}{(1-r_1 r_2 \beta)^2 + r_s^2 r_r^2 \gamma [r_1(1+\alpha) - \alpha \Delta r_1 + (1-p_1) r_2^2 \beta^2 [r_1(1+\alpha) - \Delta r_1] - (1+\alpha)(r_1^2+1-p_1)r_2 \beta]}$$

Pour simplifier les termes en  $\Delta r_1$  de la seconde fraction, il faudrait a priori connaître la valeur de  $\alpha$ . Cependant, il semble clair que  $\alpha$  posera problème uniquement si sa partie réelle est proche de 1; autrement, les termes facteurs de  $r_1$  et  $\Delta r_1$  seront tous comparables.

Pour s'affranchir de ce problème, une fois l'interféromètre monté, on pourra évaluer  $d = b-a$ , et fixer  $\omega_m$  de manière à ce que  $(2d\omega_m/c) = \pi/4$ , par exemple; on sera alors certain que les parties réelles et imaginaires de  $\alpha$ ,  $(1-\alpha)$ ,  $(1+\alpha)$ , seront du même ordre de grandeur, et on pourra écrire :

$$\alpha \Delta r_1 \ll r_1 (1-\alpha)$$

$$\Delta r_1 \ll r_1 (1-\alpha)$$

$$\alpha \Delta r_1 \ll r_1 (1+\alpha)$$

$$\Delta r_1 \ll r_1 (1+\alpha)$$

**Exemple** : si on prend  $d = 0,8$  m, valeur qui permettrait de vérifier la condition  $(2d\omega/c) = \pi$  si le laser émet à une longueur d'onde  $\lambda = 1064$  nm, alors il faudrait



utiliser une fréquence de modulation  $f_m$  d'environ 23 MHz pour pouvoir obtenir  $(2d\omega_m/c) \approx \pi/4$ .

Avec les approximations faites ci-dessus, on peut écrire :

$$t(0) t^*(\omega_m) = r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{\Delta r_1 [1 - (1-p_1) r_2^2]}{(1 - r_1 r_2)^2 + 2 r_r r_s^2 (1 - r_1 r_2) (r_1 - (1-p_1) r_2)} \\ \times \frac{(1-\alpha) [r_1 (1 + (1-p_1) r_2^2 \beta^2) - (r_1^2 + 1 - p_1) r_2 \beta]}{(1 - r_1 r_2 \beta)^2 + r_r r_s^2 \gamma(1+\alpha) [r_1 (1 + (1-p_1) r_2^2 \beta^2) - (r_1^2 + 1 - p_1) r_2 \beta]}$$

On factorise :

$$t(0) t^*(\omega_m) = r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{\Delta r_1 [1 - (1-p_1) r_2^2]}{(1 - r_1 r_2) [(1 - r_1 r_2) + 2 r_r r_s^2 (r_1 - (1-p_1) r_2)]} \\ \times \frac{(1-\alpha) (r_1 - (1-p_1) r_2 \beta) (1 - r_1 r_2 \beta)}{(1 - r_1 r_2 \beta)^2 + r_r r_s^2 \gamma(1+\alpha) (r_1 - (1-p_1) r_2 \beta) (1 - r_1 r_2 \beta)}$$

Finalement :

$$t(0) t^*(\omega_m) = r_s^4 r_r^2 e^{-i(1+2a)\frac{\omega_m}{c}} \frac{\Delta r_1 [1 - (1-p_1) r_2^2]}{(1 - r_1 r_2) [(1 - r_1 r_2) + 2 r_r r_s^2 (r_1 - (1-p_1) r_2)]} \\ \times \frac{(1-\alpha) (r_1 - (1-p_1) r_2 \beta)}{(1 - r_1 r_2 \beta) + r_r r_s^2 \gamma(1+\alpha) (r_1 - (1-p_1) r_2 \beta)}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$t(0) t^*(\omega_m) = A' \Delta r_1, \quad A' \text{ étant un complexe indépendant de } \Delta r_1$$

Dans ces conditions, on voit que  $t(0) t^*(\omega_m)$  est une fonction impaire de  $\Delta r_1$ .  
Il en sera donc de même de  $S(t)$ .

Il faut cependant remarquer que ce résultat est obtenu après avoir simplifié les termes en  $\alpha$  d'une manière "brutale": il existe probablement des valeurs ponctuelles de la fréquence de modulation pour lesquelles  $A'$  s'annule. Il est donc intéressant de faire un calcul numérique de  $t(0) t^*(\omega_m)$ , en fixant certains paramètres et en faisant varier d'autres, pour voir par exemple sur quelle plage de fréquence autour de 23 MHz on peut disposer d'un signal d'erreur.

Pour ce faire, on a programmé la fonction  $t(0) t^*(\omega_m) = f(\Delta r_1)$ , en prenant comme constantes :

$$L = 3 \text{ km};$$

$$a = 5,6 \text{ m};$$

$$b = 6,4 \text{ m};$$

$$l = 5 \text{ m};$$

$$r_r = 0,95;$$

$$r_r^2 = 0,0975;$$

$$r_s^2 = 0,5$$

$$r_1^2 = 0,85;$$

$$r_2^2 = 0,99995;$$

$$p_1 = 10^{-4};$$

et on a tracé les courbes  $t(0) t^*(\omega_m) = f(\Delta r_1)$  pour  $\Delta r_1$  variant entre -0,1 et 0,1, en prenant la fréquence de modulation  $f_m$  et le déphasage entre la démodulation et la modulation comme paramètres. On a ainsi obtenu deux réseaux de courbes, représentés sur la page suivante.

Le premier réseau a été obtenu en faisant varier  $f_m$  entre 22 MHz et 32 MHz, avec un pas de 2 MHz; on a pris les amplitudes de modulation et de démodulation en quadrature de phase.

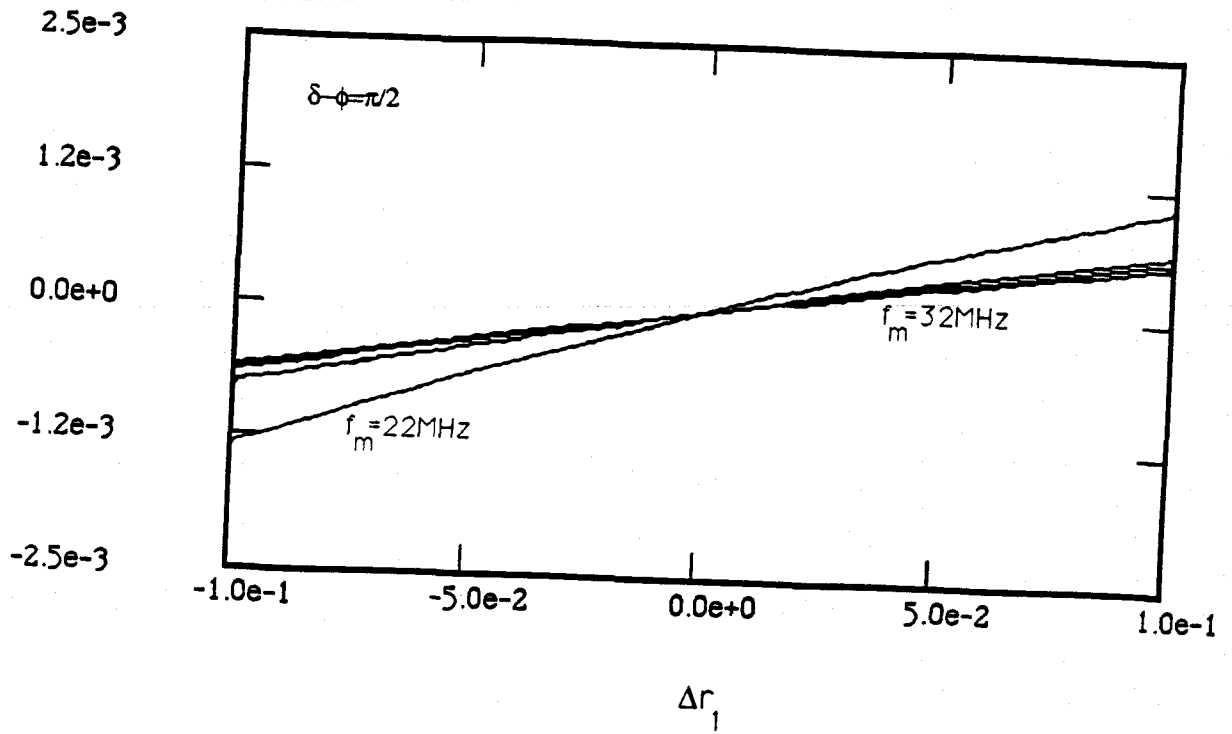
Pour le deuxième réseau, on a fixé  $f_m$  à 27 MHz, et on a fait varier l'écart entre la phase de démodulation et la phase de modulation entre 1 et 2 radians.

Dans les deux cas, on peut observer qu'on obtient bien des fonctions impaires de la différence des réflectivités, ayant toutes des pentes positives assez proches les unes des autres.

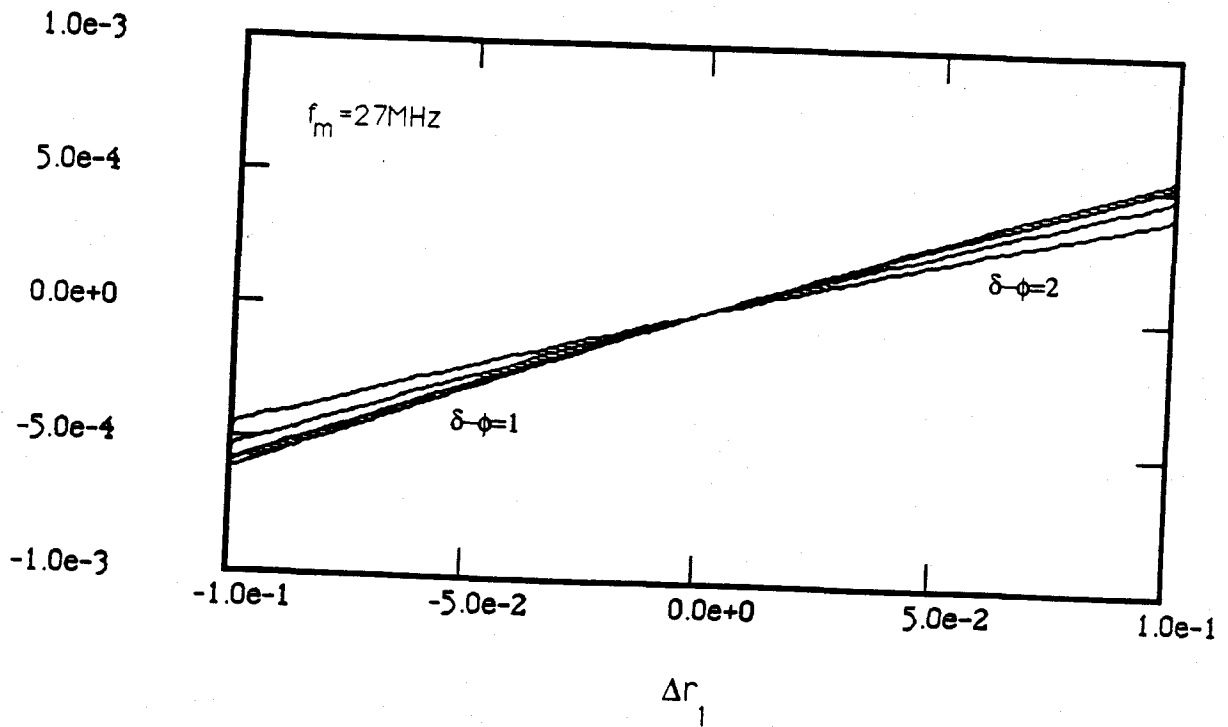
De plus, d'après le premier réseau de courbe, il semble plus intéressant de travailler à 22 MHz qu'entre 24 et 32 MHz, car on a une pente plus grande.

Cependant, les deux graphes de la page 37 démentent ces impressions.

$t(0)t^*(\omega_m)$

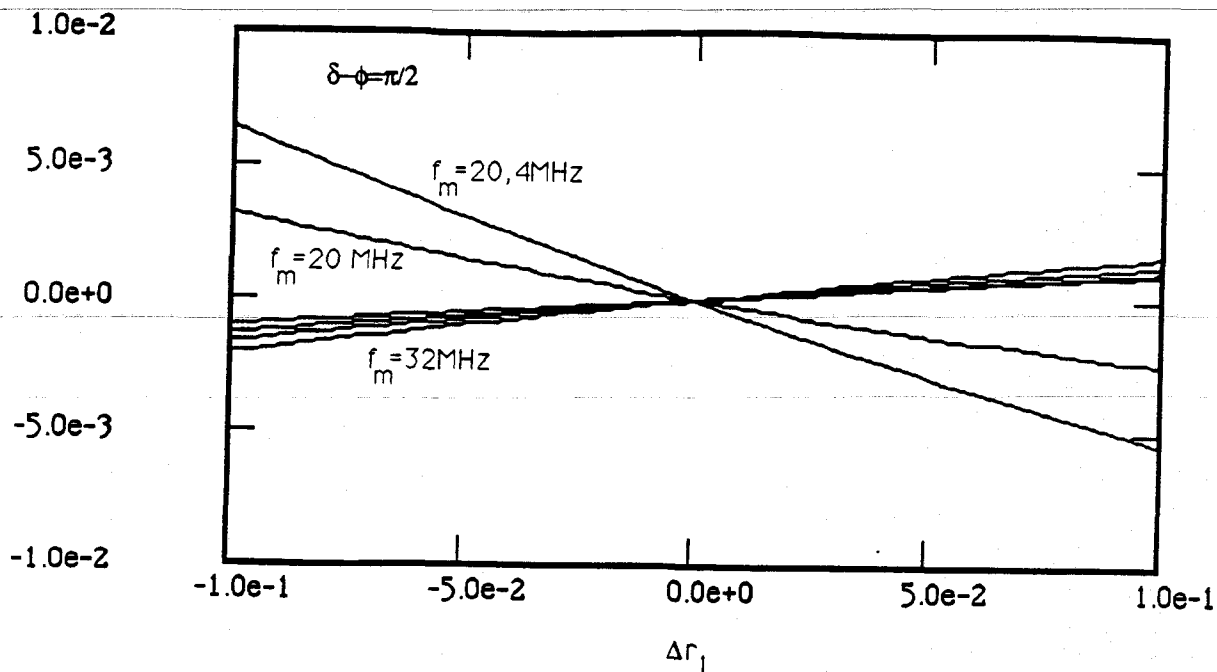


$t(0)t^*(\omega_m)$

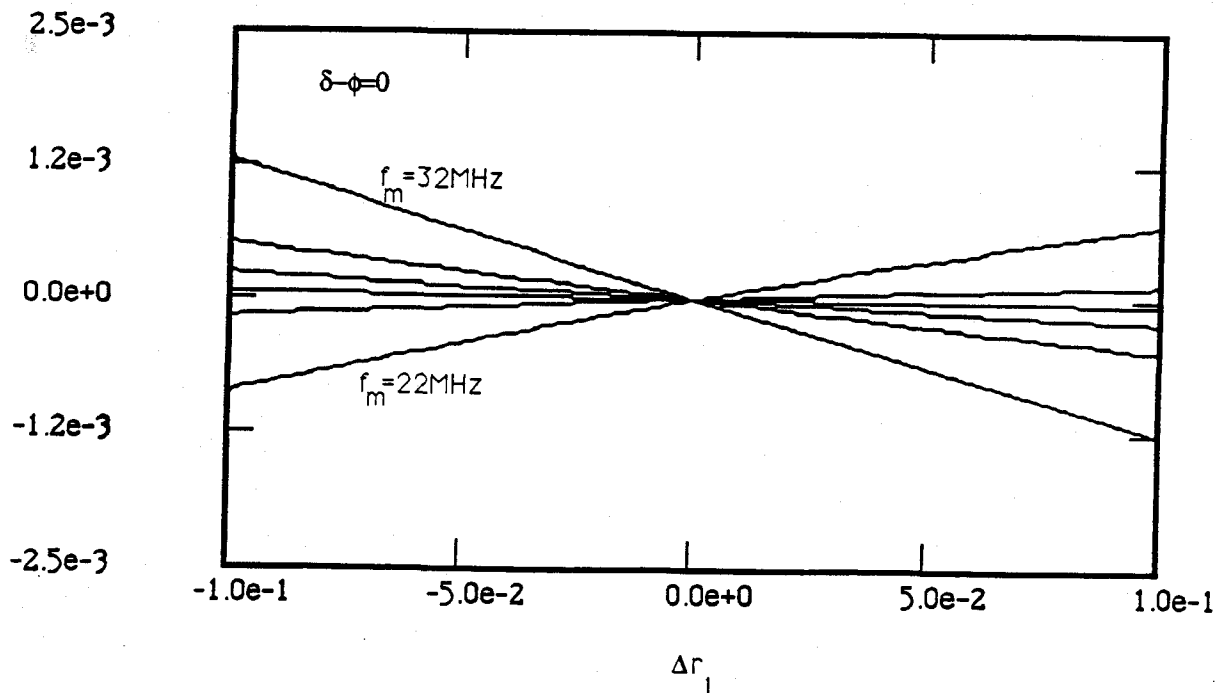


Variations de  $t(0)t^*(\omega_m)$  en fonction de  $\Delta r_1$  pour différentes valeurs de la fréquence de modulation et l'écart entre les phases de modulation/démodulation

$t(0)t^*(\omega_m)$



$t(0)t^*(\omega_m)$



Variations de  $t(0)t^*(\omega_m)$  en fonction de  $\Delta r_1$  pour différentes valeurs de la fréquence de modulation et de l'écart entre les phases de modulation/démodulation.

Sur le premier, on a tracé  $t(0) t^*(\omega_m) = f(\Delta r_1)$  pour  $f_m$  variant entre 20 et 22 MHz avec un pas de 0,4 MHz, la modulation et la démodulation étant toujours en quadrature de phase. On observe que les deux premières courbes ont une pente négative, et qu'il y a un brutal changement de pente entre 20,4 et 20,8 MHz. Donc, dans la zone des 20-22 MHz on pourra trouver des pentes plus grandes que dans les 24-32 MHz, mais il faudra alors contrôler bien plus précisément la valeur de la fréquence de modulation.

Sur le second, on a tracé  $t(0) t^*(\omega_m) = f(\Delta r_1)$  pour  $f_m$  variant entre 22 et 32 MHz, mais avec des signaux de modulation et de démodulation en phase. Ici, il y a un changement de pente entre 24 et 26 MHz, donc une valeur de la fréquence entre les deux pour laquelle on ne pourra pas disposer de signal d'erreur.

Par conséquent, une fois les caractéristiques de l'interféromètre fixées, il faudra simuler le signal de sortie pour trouver une zone de fréquence de modulation sur laquelle on puisse maintenir un signal d'erreur de pente de signe constant. La largeur de cette zone devra être d'autant plus grande que le modulateur sera moins stable en fréquence.

On peut donc affirmer que  $S(t)$  est un signal proportionnel à  $\Delta r_1$ , et qui peut être approximé par une fonction impaire de  $\Delta r_1$  au voisinage de 0 si la fréquence de modulation et l'écart entre les phases de modulation et de démodulation sont correctement choisis. Il pourra donc servir de signal d'erreur pour le contrôle thermique des réflectivités des miroirs d'entrée si les conditions suivantes sont réalisées :

- l'onde incidente dans l'interféromètre est modulée en amplitude;
- la porteuse est résonante dans tout l'interféromètre, cavité de recyclage comprise;
- les deux bandes latérales sont à des fréquences quelconques, à condition qu'elles ne donnent ni un maximum ni un minimum en sortie de l'interféromètre quand les deux bras sont symétriques (par exemple, si  $b-a=0,8$  m, on modulera à  $f_m=23$  MHz);
- les différences entre les réflectivités des miroirs sont relativement faibles ( $\Delta r_1 \ll r_1$ ).

### c) Modulation de phase frontale et utilisation d'une lame de phase en sortie

Cette méthode nécessitera une modification du schéma de l'interféromètre : il faudra rajouter une séparatrice à la sortie de l'interféromètre (voir le schéma de la page suivante). Cette séparatrice réfléchira une partie du signal vers le banc de détection, qui sera inchangé ( photodiode + démodulation + passe-bas ); une autre partie du signal traversera la séparatrice, puis sera transmise vers une autre photodiode, puis elle aussi démodulée et filtrée.

Le signal obtenu en sortie de ce second ensemble devrait pouvoir servir de signal d'erreur pour le contrôle des températures des miroirs d'entrée, car le passage de la lumière à travers la séparatrice aura un effet de lame de phase, c'est à dire que la phase du signal émergent sera différente de celle du signal incident, la différence de phase dépendant de la fréquence du signal.

Si on n'utilisait pas de séparatrice, lors de la réception d'ondes gravitationnelles de fréquence  $\nu_g$ , l'action de la lame de phase sur la composante de fréquence  $\nu_g$  du signal modulé pourrait diminuer le rapport signal/bruit, ce qui serait bien entendu préjudiciable à la détection d'ondes gravitationnelles.

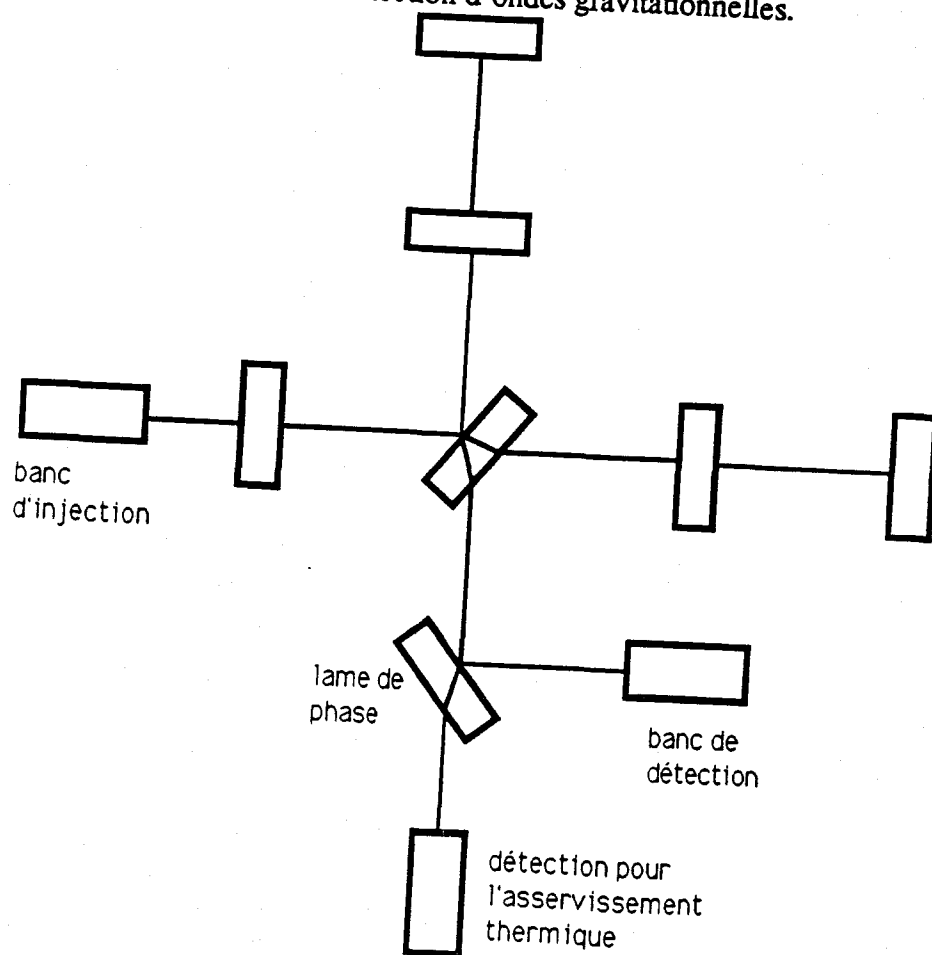


Schéma de l'interféromètre modifié pour la modulation avec lame de phase

La lame de phase est en fait une lame de silice, d'indice  $n$ , d'épaisseur  $e$ , à l'intérieur de laquelle la lumière subit un effet Fabry-Pérot. Le dessin suivant précise les notations utilisées par la suite (en réalité, pour que les calculs suivants soient rigoureusement exacts, il faudrait multiplier  $e$  par le cosinus de l'angle d'inclinaison de la séparatrice par rapport au faisceau issu de l'interféromètre, mais ceci alourdirait inutilement les formules).

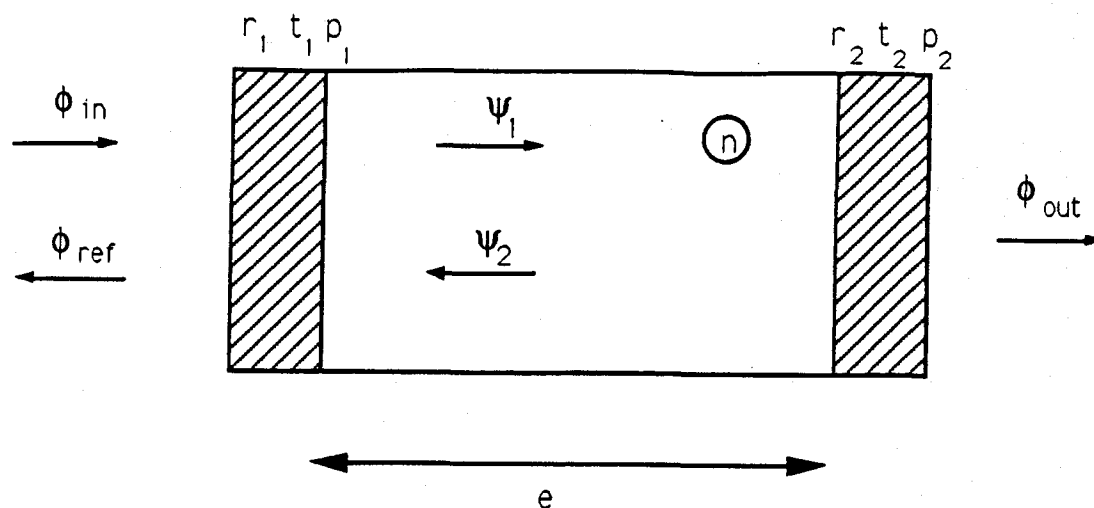


Schéma d'une lame de phase

On peut écrire les relations suivantes entre les différents signaux :

$$\psi_1 = t_1 \phi_{in} + i r_1 \psi_2 \quad (1)$$

$$\phi_{ref} = i r_1 \phi_{in} + t_1 \psi_2 \quad (2)$$

$$\phi_{out} = t_2 e^{i\delta} \psi_1 \quad (3)$$

$$\psi_2 = i r_2 e^{2i\delta} \psi_1 \quad (4)$$

L'exponentielle dans les relations (3) et (4) représente un terme de propagation aller et retour entre les deux faces du miroir.

En combinant les relations (1) et (4), on obtient :

$$\psi_1 (1 + r_1 r_2 e^{2i\delta}) = t_1 \phi_{in}$$

En reportant dans l'équation (3), on obtient la relation entre l'onde incidente sur la lame de phase et l'onde transmise, à la pulsation  $\omega$ :

$$\phi_{out} = \frac{t_1 t_2 e^{i\delta}}{1 + r_1 r_2 e^{2i\delta}} \phi_{in} \quad \text{avec } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} ne = \frac{\omega}{c} ne$$

ou encore :

$$\frac{\phi_{out}}{\phi_{in}} = t'(\omega_i) = \frac{t_1 t_2 e^{i \frac{\omega + \omega_i}{c} ne}}{1 + r_1 r_2 e^{2i \frac{\omega + \omega_i}{c} ne}}$$

Coefficient de transmission de la lame de phase pour la pulsation  $\omega + \omega_i$ .

Nous rappelons l'expression de la puissance recueillie en sortie de l'interféromètre :

$$P(t) = \|A_{out}\|^2 = A_1 A_1^* t(0) t^*(0) + A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) e^{-i\omega_m t} + A_1 C_1^* t(0) t^*(-\omega_m) e^{i\omega_m t} \\ + B_1 A_1^* t(\omega_m) t^*(0) e^{i\omega_m t} + B_1 B_1^* t(\omega_m) t^*(\omega_m) + B_1 C_1^* t(\omega_m) t^*(-\omega_m) e^{2i\omega_m t} \\ + C_1 A_1^* t(-\omega_m) t^*(0) e^{-i\omega_m t} + C_1 B_1^* t(-\omega_m) t^*(\omega_m) e^{-2i\omega_m t} + C_1 C_1^* t(-\omega_m) t^*(-\omega_m)$$

On peut décomposer le passage de la lumière à travers la séparatrice comme la combinaison de la transmission par un miroir partiellement réfléchissant et la transmission par une lame de phase. Le premier terme est équivalent à la multiplication de  $P(t)$  par une constante ( $t^2 < 1$ ), et sera sous-entendu dans la suite, pour alléger les formules. Pour traduire l'influence du second terme, on remplacera  $t(\omega_i)$  par  $t(\omega_i) t'(\omega_i)$  dans l'expression de  $P(t)$ .

Après démodulation et filtrage, on obtiendra un signal  $S(t)$  qui sera proportionnel à une résultante  $R$  qui s'écrit :

$$R = d_0 A_1 B_1^* t(0) t'(0) t^*(\omega_m) t^*(\omega_m) + d_0^* A_1 C_1^* t(0) t'(0) t^*(-\omega_m) t^*(-\omega_m) \\ + d_0^* B_1 A_1^* t(\omega_m) t'(\omega_m) t^*(0) t^*(0) + d_0 C_1 A_1^* t(-\omega_m) t'(-\omega_m) t^*(0) t^*(0)$$



La modulation du faisceau du laser est une modulation de phase pure, donc  $A_1$  est réel et  $C_1 = -B_1^*$ .

De plus, on a vu précédemment que  $t(0) t^*(-\omega_m) = t^*(0) t(\omega_m)$

$$\begin{aligned} \text{d'où } R &= 2 A_1 \operatorname{Re} [d_0 B_1^* t(0) t'(0) t^*(\omega_m) t'^*(\omega_m) + d_0^* C_1^* t(0) t'(0) t^*(-\omega_m) t'^*(-\omega_m)] \\ &= 2 A_1 \operatorname{Re} [d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) t'(0) t'^*(\omega_m) - d_0^* B_1 t^*(0) t(\omega_m) t'(0) t'^*(-\omega_m)] \\ &= 2 A_1 \operatorname{Re} [(d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m)) t'(0) t'^*(\omega_m) - (d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m))^* t'(0) t'^*(-\omega_m)] \end{aligned}$$

Soient :  $a + i b = d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m)$

$$c_1 + i c_2 = t'(0) t'^*(\omega_m)$$

$$d_1 + i d_2 = t'(0) t'^*(-\omega_m)$$

Avec ces notations :

$$\begin{aligned} R &= 2 A_1 \operatorname{Re} [(a + i b) (c_1 + i c_2) - (a - i b) (d_1 + i d_2)] \\ &= 2 A_1 \operatorname{Re} [a c_1 - b c_2 + i (b c_1 + a c_2) - a d_1 - b d_2 + i (b d_1 - a d_2)] \\ &= 2 A_1 (a c_1 - b c_2 - a d_1 - b d_2) \\ &= 2 A_1 (a (c_1 - d_1) - b (c_2 + d_2)) \end{aligned}$$

D'après l'expression de  $t(0) t^*(\omega_m)$ , on peut dire que  $a$  et  $b$  sont tous deux des fonctions localement impaires de  $\Delta r_1$ ; donc  $R$  sera aussi une fonction impaire de  $\Delta r_1$  au voisinage de 0, à moins que sa valeur soit elle-même nulle.

$R$  s'annule uniquement si :  $R \propto S(t)$

$$\frac{a}{b} = \frac{c_2 + d_2}{c_1 - d_1}$$

ou :

$$c_1 - d_1 = c_2 + d_2 = 0, \text{ c'est à dire } (d_1 + i d_2) = (c_1 + i c_2)^*$$

$d_0 B_1^* t(0) t^*(\omega_m)$  contenant des termes de phase  $(\alpha, \beta, \gamma)$  absents dans les  $t'(\omega_i)$ , la première condition est irréalisable, à moins de prendre des phases particulières.

On a :

$$c_1 + i c_2 = \frac{(t_1 t_2)^2 e^{-i \frac{\omega_m}{c} ne}}{\left(1 + r_1 r_2 e^{2i \frac{\omega}{c} ne}\right) \left(1 + r_1 r_2 e^{-2i \frac{\omega + \omega_m}{c} ne}\right)} = \frac{(t_1 t_2)^2 e^{-i \frac{\omega_m}{c} ne}}{1 + (r_1 r_2)^2 e^{-2i \frac{\omega_m}{c} ne} + r_1 r_2 \left( e^{2i \frac{\omega}{c} ne} + e^{-2i \frac{\omega + \omega_m}{c} ne} \right)}$$

et

$$d_1 + i d_2 = \frac{(t_1 t_2)^2 e^{i \frac{\omega_m}{c} ne}}{\left(1 + r_1 r_2 e^{2i \frac{\omega}{c} ne}\right) \left(1 + r_1 r_2 e^{-2i \frac{\omega - \omega_m}{c} ne}\right)} = \frac{(t_1 t_2)^2 e^{i \frac{\omega_m}{c} ne}}{1 + (r_1 r_2)^2 e^{2i \frac{\omega_m}{c} ne} + r_1 r_2 \left( e^{2i \frac{\omega}{c} ne} + e^{-2i \frac{\omega - \omega_m}{c} ne} \right)}$$

D'après ces expressions, on constate que l'on réalise la seconde condition quand  $2(\omega/c)ne = 0[\pi]$ . Ce résultat peut se retrouver par un raisonnement physique: il faut que la lame de phase décale aussi la phase de la porteuse, sinon la symétrie des bandes latérales par rapport à elle sera conservée, et leurs contributions se compenseront toujours.

Donc, dans le cas général, R ne sera pas nulle, et sera la somme de deux fonctions impaires de  $\Delta r_1$ , donc elle-même une fonction impaire de  $\Delta r_1$ .

Donc le signal de sortie de l'interféromètre pourra servir de signal d'erreur pour la symétrisation des miroirs d'entrée des Fabry-Pérot quand on utilise une modulation de phase frontale et une séparatrice à la sortie de l'interféromètre si les conditions suivantes sont remplies :

- la lumière du laser est faiblement modulée en phase;
- la porteuse est résonante dans tout l'interféromètre, cavité de recyclage comprise;
- les deux bandes latérales sont à des fréquences quelconques, à condition qu'elles ne donnent ni un maximum ni un minimum en sortie de l'interféromètre quand les deux bras sont symétriques (par exemple, si  $b-a=0,8$  m, on modulera à  $f_m=23$  MHz);
- la lame de phase décale la phase d'un signal dont la pulsation est  $\omega$  ou  $\omega_m$ ;
- les différences entre les réflectivités des deux miroirs d'entrée des Fabry-Pérot sont relativement faibles ( $\Delta r_1 \ll r_1$ ).

#### d) Modulation de phase frontale avec bande latérale unique

Le principe de la bande latérale unique est de faire passer le signal modulé du laser par un filtre passe-haut, afin de supprimer la bande latérale inférieure. Le signal obtenu en sortie de l'interféromètre est alors :

$$A_{\text{out}}(t) = A_1 \cdot t(0) \cdot e^{i\omega t} + B_1 \cdot t(\omega_m) \cdot e^{i(\omega + \omega_m)t}$$

Et la puissance de ce signal est :

$$P(t) = A_1 A_1^* t(0) t^*(0) + A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) e^{-i\omega_m t} + B_1 A_1^* t(\omega_m) t^*(0) e^{i\omega_m t} + B_1 B_1^* t(\omega_m) t^*(\omega_m)$$

Après avoir transformé cette énergie lumineuse en courant électrique par le biais d'une photodiode, on utilise le même courant de démodulation  $D(t)$  que dans le cas de la modulation de phase avec deux bandes latérales. On obtient ainsi un courant démodulé  $S(t)$  qui s'écrit :

$$S(t) \left( \frac{\eta e}{h\nu} \right)^{-1} = d_0 A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) + d_0^* B_1 A_1^* t(\omega_m) t^*(0) \\ = 2 \operatorname{Re} [ d_0 A_1 B_1^* t(0) t^*(\omega_m) ]$$

D'après les calculs effectués précédemment,  $S(t)$  sera une fonction impaire de  $\Delta r_1$ , et pourra donc servir de signal d'erreur pour le contrôle thermique de la symétrie des miroirs d'entrée des cavités, si les conditions suivantes sont remplies :

- la lumière du laser est faiblement modulée en phase, puis envoyée dans un filtre passe-haut qui coupe la bande latérale inférieure;
- la porteuse est résonante dans tout l'interféromètre, cavités de recyclage comprises;
- la bande latérale est à une fréquence quelconque, à condition qu'elle ne donne ni un maximum ni un minimum en sortie de l'interféromètre quand les deux bras sont symétriques (par exemple, si  $b-a=0,8$  m, on modulera à  $f_m=23$  MHz);
- les différences entre les réflectivités des deux miroirs d'entrée des Fabry-Pérot sont relativement faibles ( $\Delta r_1 \ll r_1$ ).

Jusqu'ici, on a envisagé de moduler la lumière incidente sur le laser, en phase ou en amplitude, pour disposer d'un signal d'erreur adéquat. Mais l'on pourrait aussi songer à moduler directement les températures des thermostats des miroirs d'entrée des cavités, ce qui reviendrait à moduler leurs réflectivités, donc la lumière circulant dans l'interféromètre. C'est cette possibilité que nous allons maintenant étudier.

### e) Modulation en température

L'idée est ici de moduler la température des thermostats des deux miroirs d'entrée, tout en extrayant toujours le signal d'erreur du signal de sortie de l'interféromètre. On écrit cette modulation sous la forme :

$$T_1 = T_{10} + T_{11} e^{i\Omega_1 t} \quad \text{avec } T_{11} \ll T_{10}$$

pour le miroir 1, et :

$$T_2 = T_{20} + T_{21} e^{i\Omega_2 t} \quad \text{avec } T_{21} \ll T_{20}$$

pour le miroir 2.

L'onde envoyée sur l'interféromètre peut s'écrire :

$$A_{in} = A_1 e^{i\omega t}$$

Et l'onde recueillie à la sortie sera :

$$A_{out} = A_1 t(T_1, T_2) e^{i\omega t}$$

avec :

$$t(T_1, T_2) = \frac{-r_s t_s t_r e^{i\frac{\omega}{c} \left[ e^{2ia\frac{\omega}{c}} F_1(T_1) + e^{2ib\frac{\omega}{c}} F_2(T_2) \right]}}{1 + r_r e^{2il\frac{\omega}{c} \left[ t_s^2 e^{2ia\frac{\omega}{c}} F_1(T_1) - r_s^2 e^{2ib\frac{\omega}{c}} F_2(T_2) \right]}}$$

La puissance lumineuse de cette onde sera transformée en courant par une photodiode. on obtiendra alors un signal proportionnel à  $S(t) = t(T_1, T_2) t^*(T_1, T_2)$ .

Si l'on suppose, comme dans le cas de la modulation frontale de la lumière du laser, que la séparatrice est parfaite et que la porteuse (de fréquence  $\omega$ ) est résonante dans tout l'interféromètre, alors on peut écrire :

$$t(T_1, T_2) = \frac{-r_s^2 t_r e^{-i\frac{\omega}{c}} [F_1(T_1) - F_2(T_2)]}{1 + r_r r_s^2 [F_1(T_1) + F_2(T_2)]}$$

$$\text{Et } S(t) = \frac{r_s^4 r_1^2 [F_1(T_1) - F_2(T_2)] [F_1^*(T_1) - F_2^*(T_2)]}{[1 + r_s^2 r_1^2 [F_1(T_1) + F_2(T_2)]] [1 + r_s^2 r_1^2 [F_1^*(T_1) + F_2^*(T_2)]]}$$

$$\text{Or } F_1(T_1) = \frac{r_1(T_1) - (1 - p_1) r_2}{1 - r_1(T_1) r_2} \text{ donc } F_1^*(T_1) = F_1(T_1)$$

De même,  $F_2^*(T_2) = F_2(T_2)$ .

$$\text{Donc } S(t) \text{ est proportionnel à } \frac{[F_1(T_1) - F_2(T_2)]^2}{[1 + r_s^2 r_1^2 [F_1(T_1) + F_2(T_2)]]^2}$$

D'après les calculs effectués précédemment dans le cas de la modulation frontale,  $F_1(T_1) - F_2(T_2)$  est proportionnel à  $\Delta r_1$ ; donc  $S(t)$  est proportionnel à  $(\Delta r_1)^2$  et ne peut donc pas être utilisé comme signal d'erreur pour la symétrisation des réflectivités des miroirs d'entrée.

Une alternative à ce problème pourrait être de déregler légèrement l'une des deux cavités Fabry-Pérot de la résonance en modifiant sa longueur. Les calculs montrent que l'on obtiendrait alors un signal en sortie localement impair en fonction de  $\Delta r_1$ . Cependant, le dérèglement de cette cavité entraînerait une diminution très nette de la puissance stockée dans la cavité, donc de l'échauffement du miroir par la lumière du laser; et les réglages thermiques effectués sur les miroirs dans ce cas ne seraient plus du tout valables quand on reviendrait à pleine puissance.

La modulation de la température des miroirs ne semble donc pas être une méthode adéquate pour obtenir un signal d'erreur permettant d'effectuer un contrôle thermique de la symétrie des bras de Virgo.

**Conclusion** : En effectuant une modulation d'amplitude du faisceau du laser, ou une modulation de phase à bande latérale unique, ou encore une modulation de phase à deux bandes latérales avec une séparatrice supplémentaire à la sortie de l'interféromètre, on disposera d'un signal d'erreur permettant d'effectuer une correction des écarts des réflectivités des miroirs d'entrée des cavités Fabry-Pérot par effet thermique.

Néanmoins, la modulation d'amplitude semble la plus avantageuse, car elle ne nécessite pas de lame supplémentaire, et l'amplitude du signal démodulé obtenu par cette méthode est supérieure à celle obtenue dans le cas de la bande latérale unique (dans un rapport  $m/J_1(m)$ ).

Une fois qu'on disposera d'un signal d'erreur, on l'enverra sur un comparateur pour connaître son signe. Ensuite, à intervalles réguliers, on augmentera ou on baissera la température des thermostats des miroirs en fonction du signe de  $S(t)$ . Par exemple, au bout d'un temps  $t_1$ , on augmentera le thermostat du miroir d'entrée du bras Nord si  $S(t) > 0$ , et on diminuera celui du bras Ouest si  $S(t) < 0$  au bout d'un temps  $t_2 \neq t_1$ .

### 3) Etude de la variation de réflectivité du miroir de recyclage en fonction de la température

#### a) But de l'étude

L'interféromètre Virgo étant prévu pour être réglé sur une frange sombre en sortie, il y aura donc une énergie lumineuse maximale renvoyée vers l'entrée, c'est à dire le laser. Si l'on pouvait réinjecter cette lumière dans l'interféromètre, cela augmenterait la puissance stockée à l'intérieur, et diminuerait donc le bruit de photons (voir III 3), d'où un gain en sensibilité. De plus, cette lumière arrivant sur le laser pourrait le détériorer. Aussi met-on sur son trajet un miroir de recyclage, qui renvoie la lumière vers l'interféromètre, avec qui il forme une cavité résonante. Il existe une valeur optimale de sa réflectivité pour laquelle la puissance stockée dans l'interféromètre est maximale. On conçoit qu'il est important que le recyclage reste optimal au cours du temps. C'est dans cette optique que nous allons étudier la sensibilité du miroir de recyclage aux variations thermiques.

Cette étude repose sur les mêmes principes que l'étude de la variation thermique des miroirs d'entrée de Virgo. On va donc supposer que le miroir de recyclage est équivalent à une cavité Fabry-Pérot, dont les miroirs d'entrée et de renvoi sont les faces du miroir, de réflectivités en amplitude respectives  $r_1$  et  $r_2$  ( la face 1 étant celle vue par le laser ). D'après les résultats énoncés précédemment, on supposera que  $r_1$  et  $r_2$  restent constantes quand la température varie, et que seuls l'indice  $n$  de la silice constituant le miroir et son épaisseur  $d$  évoluent notablement sous l'influence de la température.

#### b) Méthode utilisée

Comme dans le cas des miroirs d'entrée, si la température augmente, la réflectivité ( en intensité ) du miroir de recyclage va osciller périodiquement entre les valeurs  $R_{\min}$  et  $R_{\max}$ , définies par :

$$R_{\min} = \frac{(r_2 - r_1(1-p))^2}{(1 - r_1 r_2)^2}$$

et

$$R_{\max} = \frac{(r_2 + r_1(1-p))^2}{(1+r_1r_2)^2}$$

$p$  désignant les pertes en intensité de la face de réflectivité  $r_2$  du miroir.

Si l'on s'en réfère aux spécifications actuelles du projet Virgo, l'épaisseur du miroir sera la même que celle des miroirs d'entrée ( $d=0,1$  m), et son constituant la silice ( $n=1,45$ ); la demi-période d'oscillation sera donc la même que pour ceux-ci :  $\Delta T=0,226$  K.

Le rôle de ce miroir est de renvoyer de la lumière vers le Michelson, pour compenser les pertes de l'interféromètre. On montre [7] que le recyclage est optimal quand :

$$\left( \frac{t_{\text{opt}}}{1-r_{\text{opt}}} \right)^2 = \frac{1}{p}$$

$t_{\text{opt}}$  désignant le coefficient de transmission en amplitude optimal du miroir de recyclage;

$r_{\text{opt}}$  désignant le coefficient de réflexion en amplitude optimal du miroir de recyclage;

$p$  désignant les pertes totales du recyclage:

$p=p_r+2p_s+p_c$   $p_r$  : pertes du miroir de recyclage;

$p_s$  : pertes de la lame séparatrice;

$p_c$  : pertes dans les cavités Fabry-Pérot.

Les pertes de la séparatrice incluent notamment les pertes dues à des interférences sur la lame, elles-même dues à un mauvais alignement des miroirs ou une asymétrie des deux bras du Michelson.

Les pertes totales de recyclage peuvent évoluer au cours du temps (par effets thermiques dynamiques dûs à l'absorption du faisceau laser dans les miroirs (6 kW dans les cavités), par exemple). Il serait donc intéressant de pouvoir contrôler thermiquement la réflectivité du miroir de recyclage pour la maintenir optimale à mesure que les pertes évoluent.

Nous allons considérer trois cas de figure : quand les pertes de recyclage maximales  $p_{\max}$  sont 10 %, quand elles sont 5 %, et quand elles sont 2 %. Pour chacun de ces cas, on prendra une face avant sans anti-reflet ( $r_1^2=0,03$ ), puis avec un faible anti-reflet ( $r_1^2=0,01$ ), enfin avec un bon anti-reflet ( $r_1^2=0,001$ ). Nous déduirons de  $p_{\max}$  la réflectivité optimale du miroir de recyclage correspondante,



$r_{\min}$ :

$$\text{On a : } \left( \frac{t_{\min}}{1-r_{\min}} \right)^2 = \frac{1}{p_{\max}} \quad \text{or } t_{\min}^2 = 1-r_{\min}^2 \cdot p_r \approx 1-r_{\min}^2$$

$$\text{d'où } \frac{1-r_{\min}^2}{(1-r_{\min})^2} \approx \frac{1}{p_{\max}} \quad \text{donc } \frac{1+r_{\min}}{1-r_{\min}} \approx \frac{1}{p_{\max}}$$

$$\text{d'où } r_{\min} \approx \frac{1-p_{\max}}{1+p_{\max}}$$

Connaissant la valeur de  $r_1$  et celle de  $p_r$  ( on prend  $p_r = 10^{-4}$  ), on peut en déduire celle de  $r_2$ :

$$r_{\min} = \sqrt{R_{\min}} = \frac{r_2 - r_1 \cdot (1-p)}{1 - r_1 r_2} \quad \text{donc } r_{\min} \cdot (1 - r_1 r_2) = r_2 - r_1 \cdot (1-p)$$

$$\text{d'où } r_2 = \frac{r_{\min} + r_1 \cdot (1-p)}{1 + r_1 r_{\min}}$$

$$\text{On en déduit } r_{\max} = \frac{r_2 + r_1 \cdot (1-p)}{1 + r_1 r_2} \quad \text{et } p_{\min} \approx \frac{1 - r_{\max}}{1 + r_{\max}}$$

### c) Résultats

On a reproduit dans le tableau suivant, pour chaque valeur de  $p_{\max}$  et de  $r_1^2$ , les valeurs de  $p_{\min}$  et de  $\Delta T_0$ , précision du thermostat nécessaire à assurer une stabilité de 0,01 % en moyenne sur le coefficient de réflexion en intensité du miroir.

On obtient les valeurs de  $\Delta T_0$  à partir d'une simple règle de trois :

$$\frac{\Delta R}{\Delta T} = \frac{10^{-4}}{\Delta T_0} \quad \text{d'où } \Delta T_0 = \frac{10^{-4}}{\Delta R} \cdot \Delta T \quad \text{avec } \Delta R = (r_{\max})^2 - (r_{\min})^2$$

$r_1^2$	$p_{max}$	2 %	5 %	10 %
0,03		$p_{min}=0,95 \%$ $\Delta T_0=5,7 \cdot 10^{-4} \text{ K}$	$p_{min}=2,38 \%$ $\Delta T_0=2,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}$	$p_{min}=4,76 \%$ $\Delta T_0=1,4 \cdot 10^{-4} \text{ K}$
0,01		$p_{min}=1,34 \%$ $\Delta T_0=9,1 \cdot 10^{-4} \text{ K}$	$p_{min}=3,35 \%$ $\Delta T_0=4,0 \cdot 10^{-4} \text{ K}$	$p_{min}=6,70 \%$ $\Delta T_0=2,4 \cdot 10^{-4} \text{ K}$
0,001		$p_{min}=1,76 \%$ $\Delta T_0=2,6 \cdot 10^{-3} \text{ K}$	$p_{min}=4,41 \%$ $\Delta T_0=1,2 \cdot 10^{-3} \text{ K}$	$p_{min}=8,81 \%$ $\Delta T_0=6,9 \cdot 10^{-4} \text{ K}$

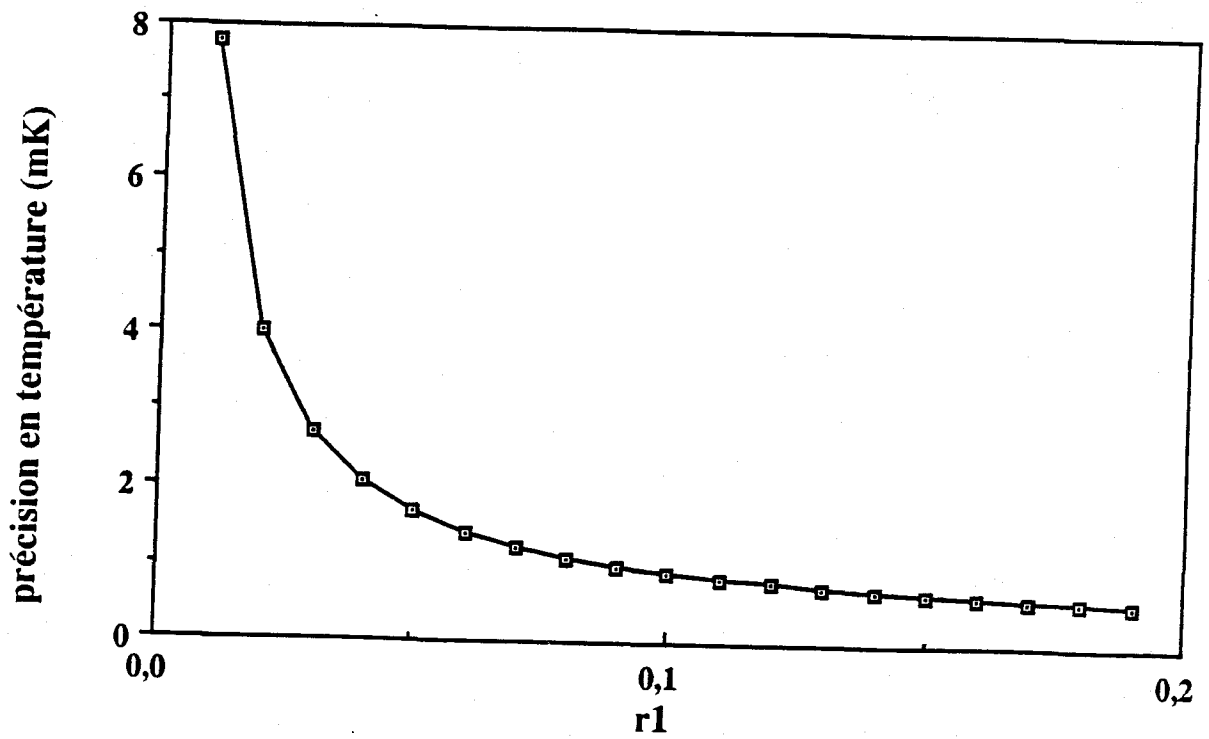
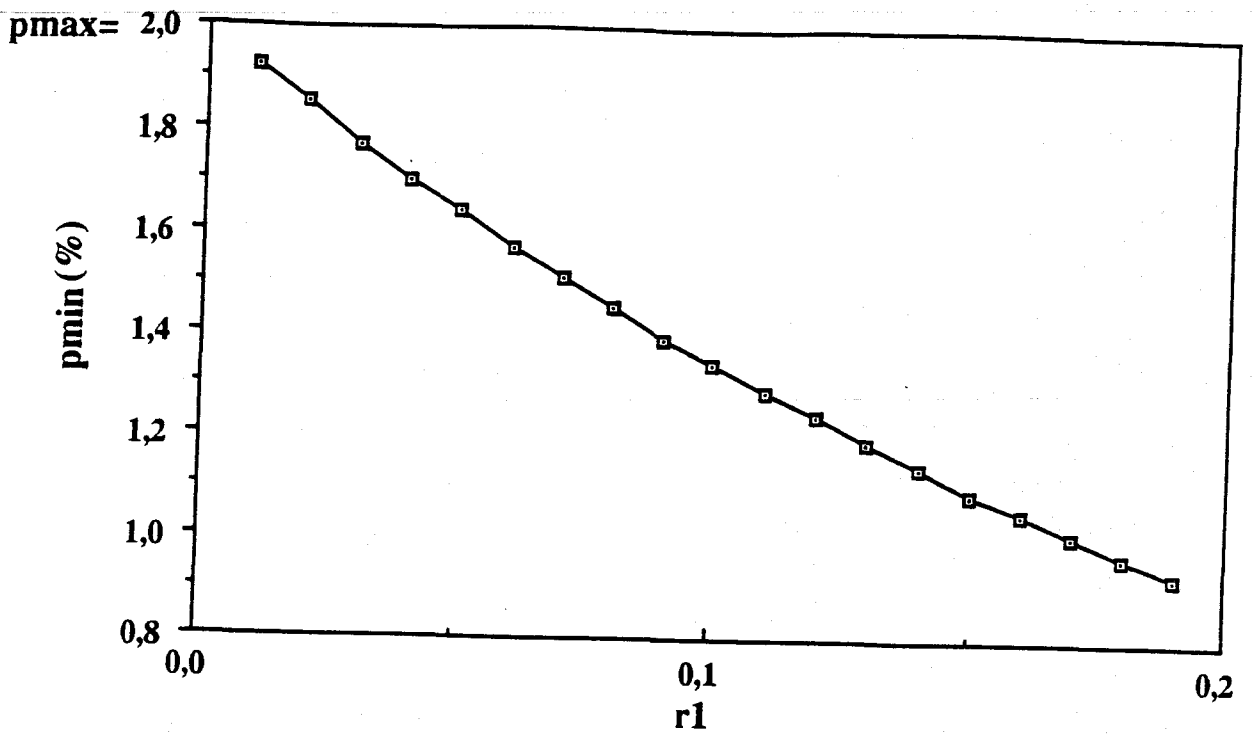
On constate en observant le tableau que même sans anti-reflet, on ne peut pas corriger des pertes petites par rapport aux pertes maximales. Par exemple, si le miroir est conçu pour corriger des pertes de 2 % au plus, un réglage de sa température permettra un recyclage optimal pour des pertes allant de 0,95 % à 2 %, mais on compensera mal des pertes plus faibles.

On remarque de plus que l'ajout d'un anti-reflet diminuera l'intervalle de pertes permettant un recyclage optimal.

En ce qui concerne la stabilité en température, on retrouve le même résultat que pour les miroirs d'entrée : à moins d'utiliser un bon anti-reflet, il faut exercer un contrôle très précis sur la température pour stabiliser la réflectivité à 0,01 % près.

On a tracé sur la page suivante les variations de  $p_{min}$  et de  $\Delta T_0$  en fonction de  $r_1$  pour des pertes maximales  $p_{max} = 2\%$ .

**Conclusion** : Il faudra donc ici aussi choisir un compromis entre la précision du thermostat et la plage d'adaptation du miroir : l'utilisation d'un anti-reflet diminuera les contraintes sur la première, mais réduira aussi la seconde.



Variations de  $p_{min}$  et  $\Delta T_0$  en fonction de  $r_1$  quand  $p_{max} = 2 \%$

## V Conclusion

Nous avons d'abord constaté que la réflectivité des miroirs utilisés dans l'interféromètre Virgo varie beaucoup avec la température: par exemple, si on utilise un miroir qui a une réflectivité en intensité de 0,83 à température ambiante (300 K), alors sa réflectivité pourra varier de 0,70 à 0,84 pour une hausse de température de 0,2K seulement.

On peut diminuer ces variations en déposant un anti-reflet sur une des faces du miroir, mais il faudra quand même utiliser un thermostat si l'on veut obtenir une différence de finesse entre les bras inférieure à  $10^{-3}$  (et si cette condition n'est pas réalisée, cela renforcera les contraintes sur la stabilité en fréquence du laser). Cependant, l'usage d'un anti-reflet permettra d'utiliser des thermostats un peu moins performants.

Pour réaliser l'asservissement des thermostats à la différence de finesse des bras, il faut disposer d'un signal d'erreur précis, qui soit une fonction impaire de cette différence (ou de la différence de réflectivité des miroirs d'entrée). Celui-ci peut être obtenu en effectuant une faible modulation frontale du faisceau du laser, et en démodulant à la sortie de l'interféromètre.

la modulation la plus simple est la modulation d'amplitude, car la modulation de phase nécessiterait la suppression d'une des bandes latérales avant l'entrée dans l'interféromètre (bande latérale unique), ou l'ajout d'une lame de phase à la sortie, avant démodulation, pour introduire un décalage de phase entre les deux bandes latérales. Cependant, ce n'est peut-être pas la plus efficace, et il serait intéressant de calculer les rapports signal sur bruit à l'entrée et à la sortie pour chaque méthode, afin de voir laquelle est la plus performante (cette étude a été commencée en annexe III).

L'interféromètre étant en fait composée de nombreuses cavités ayant chacune leurs propres fréquences de résonance, il y aura diverses valeurs de la fréquence pour lesquelles le signal de sortie ne fera pas un signal d'erreur convenable. Aussi, une fois le type de modulation choisi, évaluera-t-on la stabilité de la fréquence de modulation, et on cherchera numériquement une zone de fréquence plus large que la plage de variation de la fréquence de modulation, et sur laquelle on peut obtenir un signal d'erreur pour n'importe quelle fréquence.

Enfin, nous avons constaté que le recyclage pouvait théoriquement être

maintenu optimal, quand les pertes de l'interféromètre variaient, à l'aide d'un contrôle thermique du miroir de recyclage. Cependant, la plage d'adaptabilité du miroir est réduite, même si on parvient à effectuer un contrôle très précis de sa température, et le sera encore plus si l'on doit utiliser un anti-reflet pour exercer ce contrôle.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BRILLET & A. GIAZOTTO et Al. *VIRGO Proposal for the construction of a large interferometric detector of gravitational waves* 1989 (non publié)
- [2] documentation Corning
- [3] F. FLORY *Comparison of different technologies for high quality optical coatings* SPIE Vol 1270, Optical Thin Films and Applications, 172 ( 1990 )
- [4] F. FLORY et Al *Characterization by guided wave of instabilities of optical coatings submitted to high power flux : thermal and third order non-linear properties of dielectric thin films* Conf. presented at " Fifth topical meeting on OPTICAL INTERFERENCE COATINGS ", June 1-5, 1992, Tucson, Arizona
- [5] P. HELLO *Modèle physique et simulation de l'antenne interférométrique gravitationnelle Virgo* 1990 (thèse Université Paris XI)
- [6] J.Y. VINET *Analytical models of recycling interferometers and modulation schemes* Note VIRGO ( 24/11/92) (non publié)
- [7] J.Y. VINET et Al *Optimization of long-baseline optical interferometers for gravitational-wave detection* Phys.Rev.D 38, 433 ( 1988 )