

時間領域における modal model 計算の高速化

苔山圭以子, Hiro Yamamoto^A,

川村静児^B, 菅本晶夫^C

お茶大院, Caltech^A, 国立天文台^B, お茶大理^C

要約

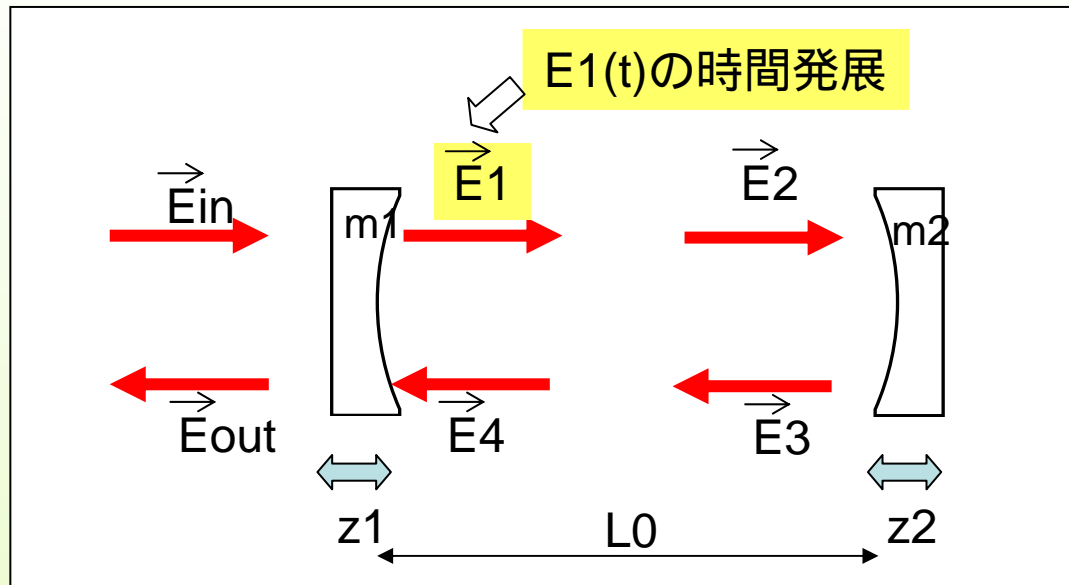
- LIGOグループが開発した
時間領域のシミュレーションソフトE2E
- 干渉計の物理をシミュレートするのにとても有用
- 長い共振器と短い共振器
(例: 数kmのFP共振器と約10mのパワーリサイクリングキャビティ)
が組み合わさったシステムを計算するには速度が遅い
- 鏡の傾きに対する線形近似などを用いて、
計算速度を速めるモジュールを開発

もくじ

- イントロダクション
- 光の電場の式をたてる
- 近似を導入する
- 数値シミュレーションの結果
- まとめ

イントロダクション

- FP共振器内の電場発展を時間領域で追うモジュール

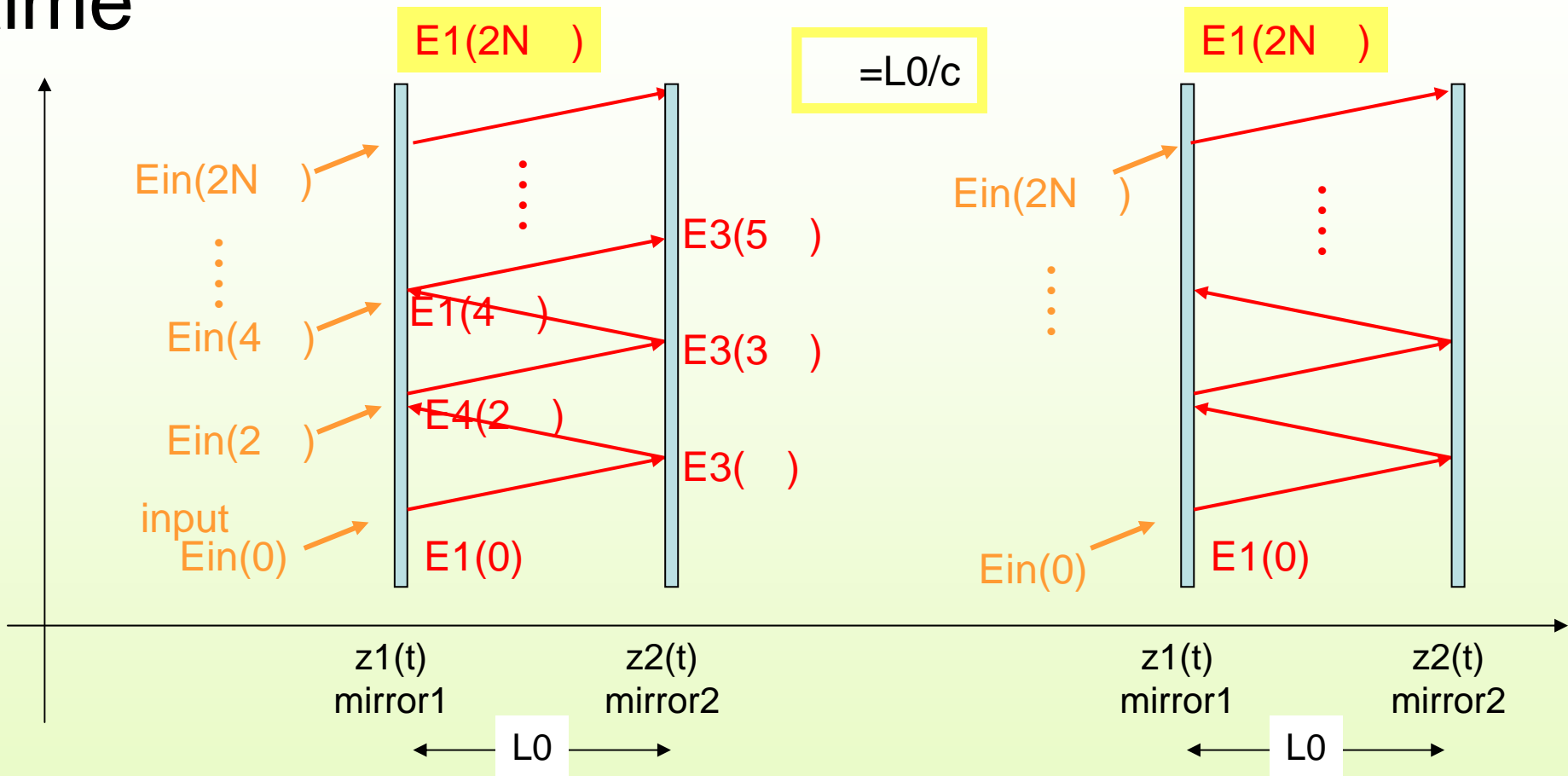


- ガウシアンビームの高次モード(TEM_{01,10}, ...)も計算できる
- アライメントコントロールデザインに使える

TEM₀₀だけを計算できる
近似を用いた高速モジュールは
すでにある

イントロダクション

time



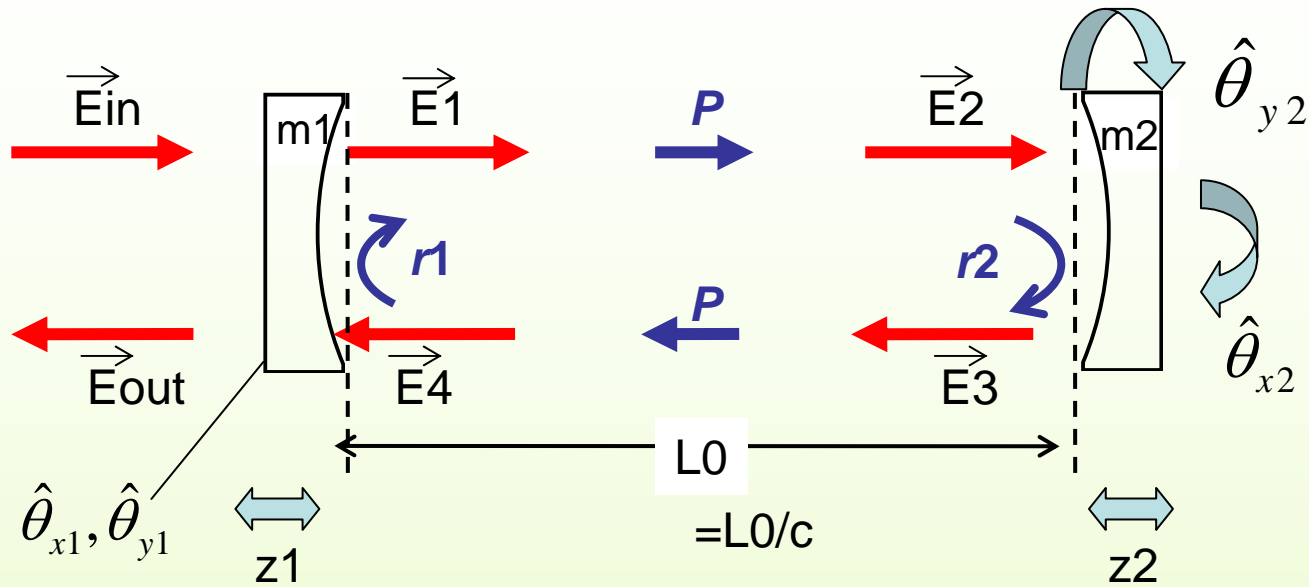
従来の方法

$E_1(0)$ $E_3(\quad)$
 $E_1(2N)$

新しい方法

$E_1(0)$ $E_1(2N)$

レーザー電磁場の式



$\vec{E}_{in} \sim \vec{E}_{out}$	レーザー電場
L_0	キャビティー長(定数)
z_1, z_2	長さ変化
P	プロパゲーター(マトリクス)
$r_1(t), r_2(t)$	反射率マトリクス, 鏡の傾き $\theta_{x,y}(t)$

マトリクスの次元は、計算したいモード数による

P is like :

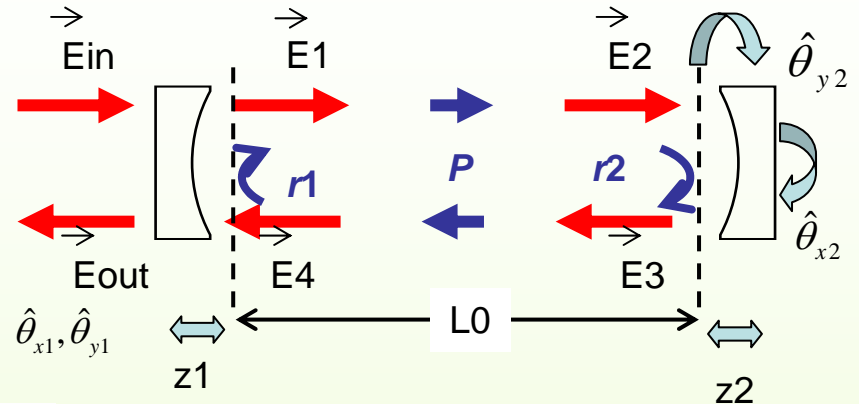
$$P = e^{-2ikL_0} \begin{bmatrix} \exp(i\eta) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \exp(2i\eta) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \exp(2i\eta) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$r_1(t)$ is like :

$$r_1 \exp\left(-\frac{\hat{\theta}_x^2 + \hat{\theta}_y^2}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & -i\hat{\theta}_x & -i\hat{\theta}_y \\ -i\hat{\theta}_x & 1 - \hat{\theta}_x^2 & -\hat{\theta}_x \hat{\theta}_y \\ -i\hat{\theta}_y & -\hat{\theta}_x \hat{\theta}_y & 1 - \hat{\theta}_y^2 \end{pmatrix}$$

レーザー電磁場の式

$$(1) \begin{cases} \vec{E}_1(t) = t_1 \vec{E}_{in}(t) - r_1(t) \vec{E}_4(t) e^{2ikz_1(t)} \\ \vec{E}_2(t) = P \vec{E}_1(t - \tau) \\ \vec{E}_3(t) = -r_2(t) \vec{E}_2(t) e^{2ikz_2(t)} \\ \vec{E}_4(t) = P \vec{E}_3(t - \tau) \end{cases}$$



$E_1(t)$ は次のように解ける:

$$(2) \quad \vec{E}_1(t) = t_1 \vec{E}_{in}(t) + \mathbf{R}(t) \vec{E}_1(t - 2\tau) \exp i\phi(t)$$

$E_1(t-2\tau)$ を代入, 繰り返すと

$$(3) \quad \begin{aligned} \vec{E}_1(t) = t_1 \vec{E}_{in}(t) + t_1 \sum_{n=1}^{N-1} \prod_{m=1}^{n-1} \mathbf{R}(t - 2(m-1)\tau) \vec{E}_{in}(t - 2n\tau) \exp \left[i \sum_{m=0}^{n-1} \phi(t - 2m\tau) \right] \\ + \prod_{m=1}^{n-1} \mathbf{R}(t - 2(m-1)\tau) \vec{E}_1(t - 2N\tau) \exp \left[i \sum_{m=0}^{N-1} \phi(t - 2m\tau) \right] \end{aligned}$$

1項目: 時刻 t での入力電場 (現在)

2項目: N 項の掛け算・足し算

3項目: 時刻 $t-2N\tau$ での電場

$$\phi(t) = 2k\{(z_1(t) + z_2(t - \tau))\}$$

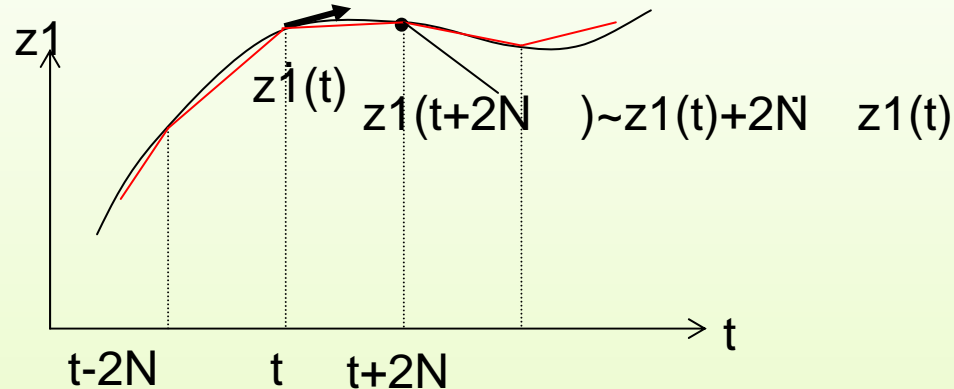
$$\mathbf{R}(t) = r_1(t) \mathbf{P} r_2(t - \tau) \mathbf{P},$$

N 項の掛け算・足し算の項が計算するのに時間がかかる

近似を導入する

●線形近似

t と t+2N 間では、物理量は線形に変化すると仮定する



- 鏡の変位 $z_1(t)$ $z_2(t)$
- 反射率マトリクス $r_1(t)$ $r_2(t)$
- 入力電場

$$z_1(t - \alpha) \simeq z_1(t) - \alpha \dot{z}_1(t)$$

$$z_2(t - \alpha) \simeq z_2(t) - \alpha \dot{z}_2(t)$$

$$r_1(t - \alpha) \simeq r_1(t) - \alpha \dot{r}_1(t)$$

$$r_2(t - \alpha) \simeq r_2(t) - \alpha \dot{r}_2(t)$$

●その他の近似

式を簡単にするため

$$\vec{E}_1(t) = \mathbf{t}_1 \vec{E}_{in}(t) + \mathbf{t}_1 \sum_{n=1}^{N-1} \prod_{m=1}^{n-1} \mathbf{R}(t - 2(m-1)\tau) \vec{E}_{in}(t - 2n\tau) \exp\left[i \sum_{m=0}^{n-1} \phi(t - 2m\tau)\right]$$

$$+ \prod_{m=1}^{n-1} \mathbf{R}(t - 2(m-1)\tau) \vec{E}_1(t - 2N\tau) \exp\left[i \sum_{m=0}^{N-1} \phi(t - 2m\tau)\right]$$

●線形近似2

$$\mathbf{r}_1(t - \alpha) \simeq \mathbf{r}_1(t) - \alpha \dot{\mathbf{r}}_1(t)$$

$$\mathbf{r}_2(t - \alpha) \simeq \mathbf{r}_2(t) - \alpha \dot{\mathbf{r}}_2(t)$$

●その他の近似 A

$$\mathbf{R}_{prod}(n, t) = \mathbf{M}_0 (\mathbf{M}_0 - 2\tau\mathbf{M}_1 - 3\tau^2\mathbf{M}_2) (\mathbf{M}_0 - 4\tau\mathbf{M}_1 - 5\tau^2\mathbf{M}_2)$$

$$\times \dots (\mathbf{M}_0 - 2(n-1)\tau\mathbf{M}_1 - (2n-3)\tau^2\mathbf{M}_2)$$

$$\simeq \mathbf{M}_0^n - \tau \sum_{k=1}^{n-1} 2k\mathbf{M}_0^{k-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_0^{n-k-1} - \tau \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)\mathbf{M}_0^k \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_0^{n-k-1}$$

$$\mathbf{R}_{prod}(n, t)$$

●線形近似1

$$z_1(t - \alpha) \simeq z_1(t) - \alpha \dot{z}_1(t)$$

$$z_2(t - \alpha) \simeq z_2(t) - \alpha \dot{z}_2(t)$$

$$2kn\{z_1(t) + z_2(t) + \tau\dot{z}_1(t)\} - 2kn^2 \{\dot{z}_1(t) + \dot{z}_2(t)\}$$

E1(t) はすこし簡単になるが、まだN項の足し算がある

$$\vec{E}_1(t) = \mathbf{t}_1 \vec{E}_{in}(t)$$

$$+ \mathbf{t}_1 \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{R}_{prod}(n, t) \vec{E}_{in}(t) \exp[in\Phi(t)] \exp[-2ikn^2\text{FS2}(t)]$$

$$+ \mathbf{R}_{prod}(N, t) \vec{E}_1(t - 2N\tau) \exp[iN\Phi_R(t)] \exp[-2ikn^2\text{FS2}(t)]$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_1(t) &= t_1 \vec{E}_{in}(t) \\ &+ t_1 \sum_{n=1}^{N-1} \mathbf{R}_{\text{prod}}(n, t) \vec{E}_{in}(t) \exp[in\Phi(t)] \exp[-2ikn^2\text{FS2}(t)] \\ &+ \mathbf{R}_{\text{prod}}(N, t) \vec{E}_1(t - 2N\tau) \exp[iN\Phi_R(t)] \exp[-2ikn^2\text{FS2}(t)] \end{aligned}$$

●その他の近似 B

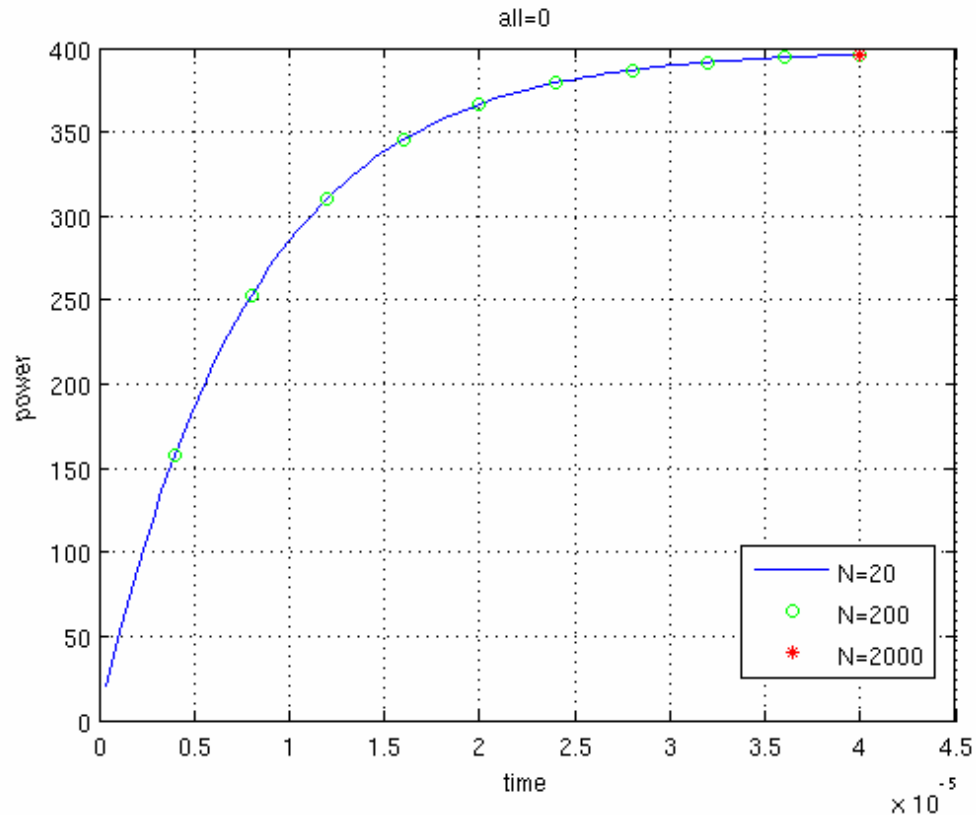
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} v^n e^{wn^2} &\simeq \sum_{n=1}^{N-1} v^n (1 + wn^2) \\ \sum_{n=1}^{N-1} n v^n e^{wn^2} &\simeq \sum_{n=1}^{N-1} n v^n (1 + wn^2) : \\ \sum_{n=1}^{N-1} n^2 v^n e^{wn^2} &\simeq \sum_{n=1}^{N-1} n^2 v^n (1 + wn^2) \end{aligned}$$

N項の掛け算・足し算がない形にできた

$$\vec{E}_1(t) = t_1 \vec{E}_{in}(t) + t_1 \bar{\mathbf{R}}_1(N, t) \vec{E}_{in}(t - 2N\tau) + \bar{\mathbf{R}}_2(N, t) \vec{E}_1(t - 2N\tau)$$

この式を使って、時間領域で $\vec{E}_1(t)$ の電場発展を計算

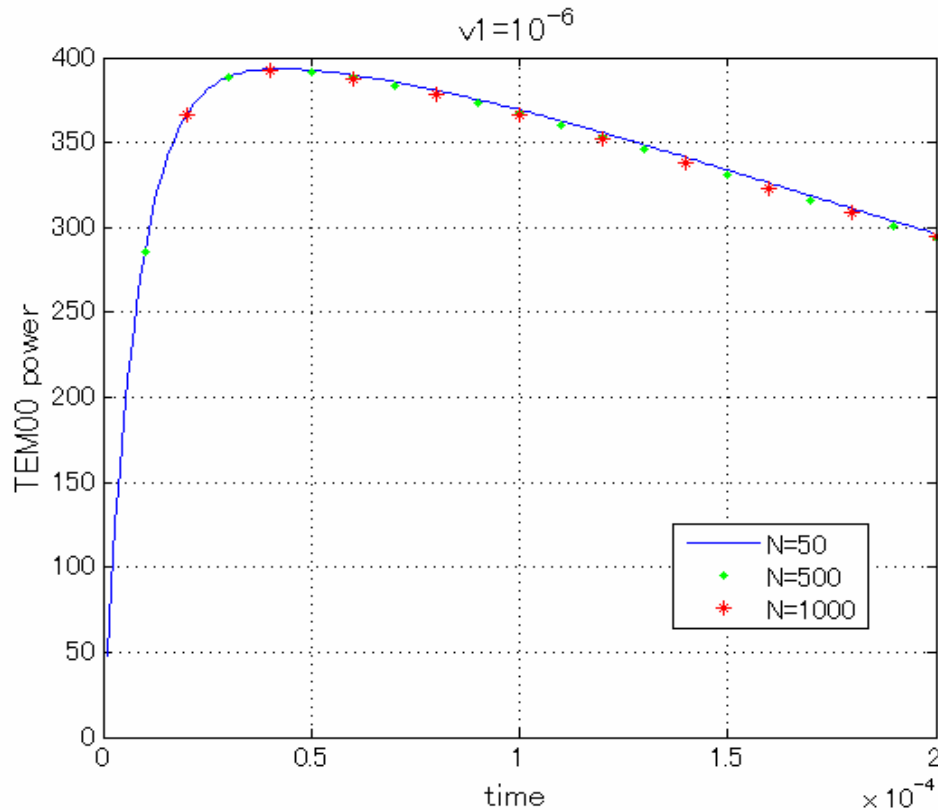
数値シミュレーションの結果(1)



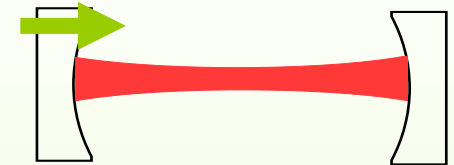
Staticな場合
鏡の位置、傾き=0

TEM00 power vs time (0 – 4×10^{-5} s)

数値シミュレーションの結果(2)



10^{-6} m/s

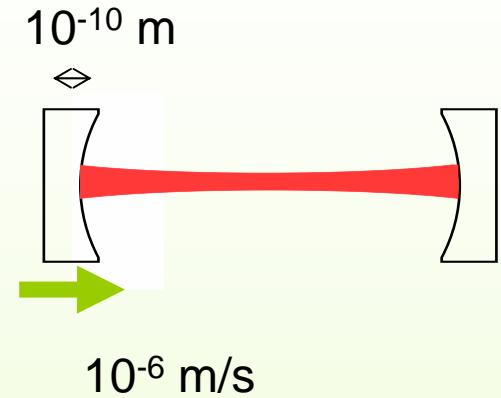
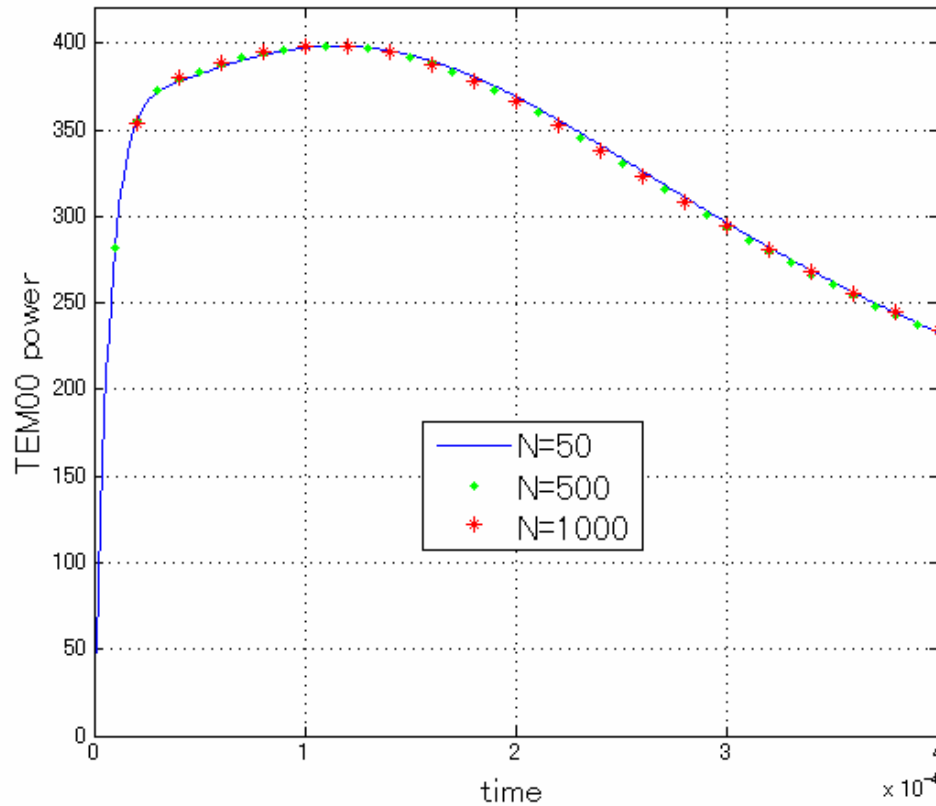


鏡が共振の位置から
 10^{-6} m/sで動く

10^{-6} m/s : 低周波での
ゆっくりとした鏡の動きの最大値

TEM00 power vs time (0 – 2×10^{-4} s)

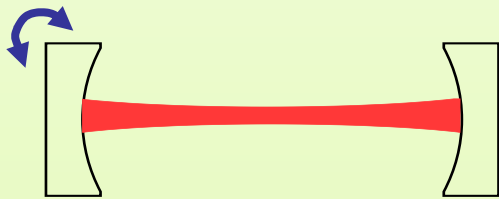
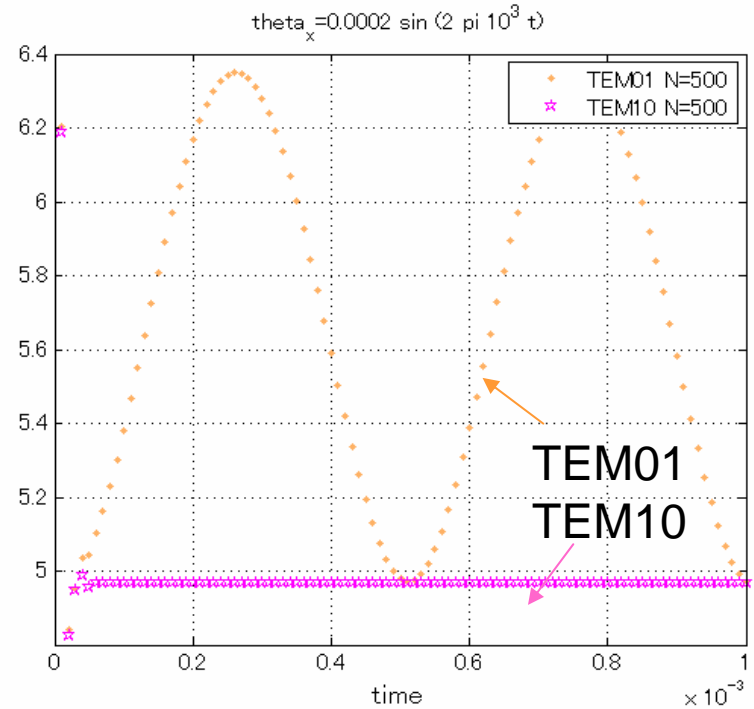
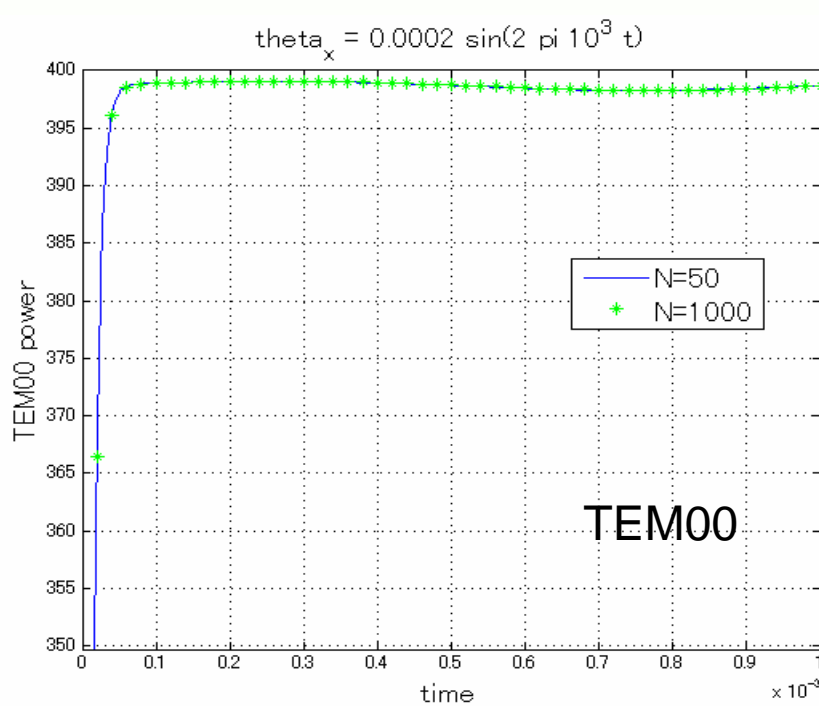
数値シミュレーションの結果(3)



鏡が共振の位置から 10^{-10} mずれたところから、速度 10^{-6} m/sで動く場合 10^{-4} [s]で共振点に達し、そのまま通過する

TEM00 power vs time (0 – 10^{-4} s)

数値シミュレーションの結果(4)



power vs time ($0 - 10^{-3}$ s)

鏡が振幅0.0002,
周波数1000Hzでゆれるとき

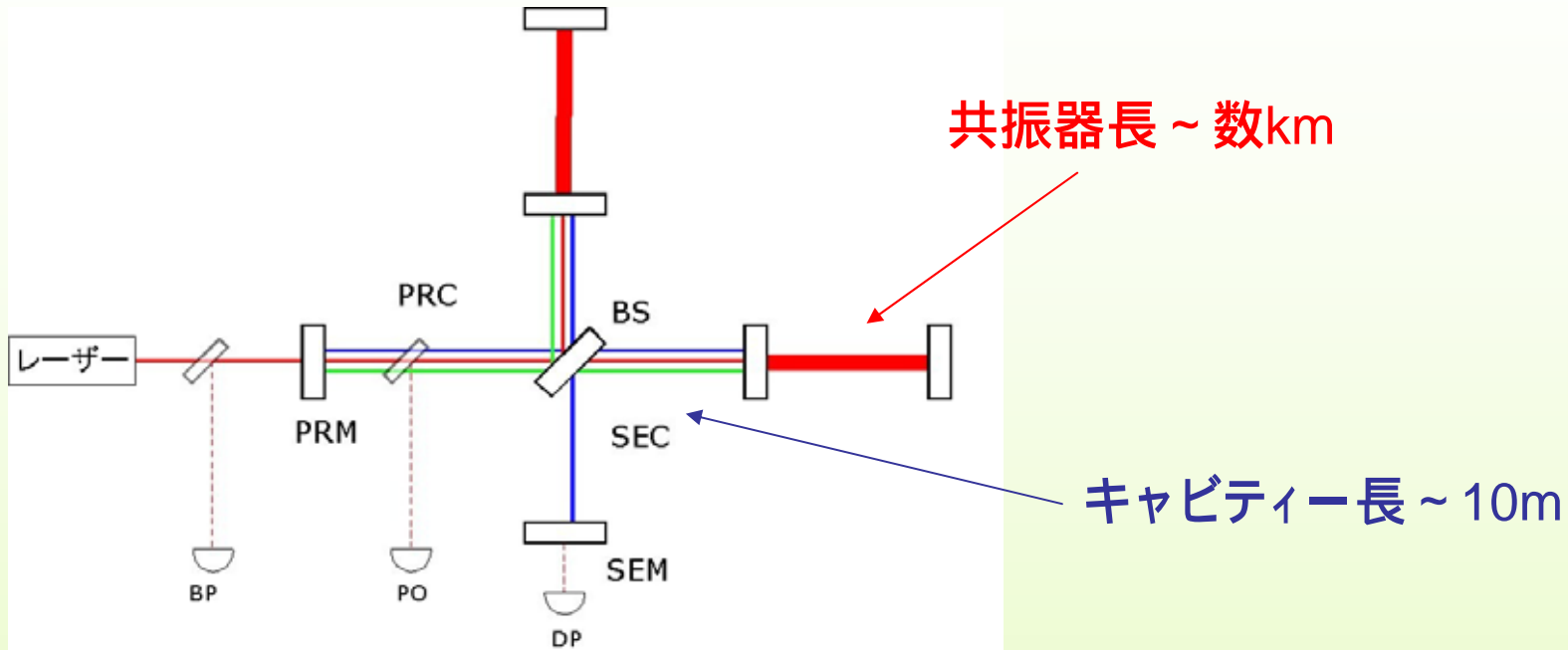
鏡の傾きによってTEM01が
励起されたのがわかる

まとめ

- 高次モード含む電場発展の式を高速化
- 線形近似を用いた
- N が大きいとき、計算は速くなる ($N \sim 100$)
例： 10^{-4}s をシミュレートするのに、
 $N=500$ (タイムステップ1000)なら約1分, $N=50$ で約10分
- 現実的な鏡の速度・傾きでは近似は有効

近似式が複雑なために、 N が小さいときは、
ふつうに計算したほうが速い

補足



Advanced LIGO、LCGTをシュミレートする場合、
干渉計中心部(キャビティー長さ約10m)のタイムステップを使う。

腕共振器(数km)をこのタイムステップで計算するには、
無駄な計算をしてしまい、時間がかかりすぎる